



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
FACULTAD DE INFORMÁTICA



**ALGORITMOS DE CÁLCULO DE VECTORES DE PRIORIDAD A
PARTIR DE MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES
IMPRECISAS**

TESIS DOCTORAL

JORGE MAURICIO RUIZ-TAGLE MOLINA

Ingeniero Civil en Informática

2011

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
FACULTAD DE INFORMÁTICA

DEPARTAMENTO DE LENGUAJES Y SISTEMAS INFORMÁTICOS E
INGENIERÍA DEL SOFTWARE

**ALGORITMOS DE CÁLCULO DE VECTORES DE PRIORIDAD A
PARTIR DE MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES
IMPRECISAS**

Autor:
Jorge Mauricio Ruiz-Tagle Molina
Ingeniero Civil en Informática

Directora
Esther Dopazo González
Dra. en Informática

Madrid, 2011

*A mis padres, Eliana y Jorge,
a mi esposa, Yasna
y a nuestros hijos, Catalina y Tomás*

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer en primer lugar a Esther Dopazo, Directora de esta Tesis Doctoral, por su incansable apoyo, por toda su paciencia, por su confianza y su optimismo y por haber contribuido significativamente, con su calidad humana y académica, a que hoy tenga los mejores recuerdos de mi estadía en Madrid junto a mi familia.

Agradezco a mi esposa Yasna, por su compañía, su paciencia y apoyo, por su energía y por su comprensión en toda esta etapa de escritura de la tesis, por sus palabras de aliento y por el tiempo dedicado a hacer posible que yo pudiera avanzar. Gracias por todo ese cariño. Gracias también a mis hijos Catalina y Tomás, por su ternura y sus revitalizadoras sonrisas y a mis padres por ese apoyo sin condiciones. Quiero agradecer también a mis suegros, con quienes siempre hemos podido contar.

Agradezco de manera muy especial a Jorge y a Mónica, por su amistad, por su permanente disposición a darnos una mano y por haberse transformado junto a Cris y Gaby en nuestra familia en Madrid. Gracias a todos los amigos con quienes siempre pudimos contar, a Moni Rojas, a Icíar y David, Gloria y Edwin y a todos los compañeros y compañeras de doctorado.

Vaya mi agradecimiento a mis amigos Jesús Martínez y Daniel Lancho por tantas sonrisas, partidos de fútbol, y jornadas arreglando el mundo. Gracias también a todo ese gran grupo de “futboleros” para los que siempre estuvo en primer lugar pasarlo bien.

Deseo agradecer también a mis amigos y colegas del Instituto de Informática de la Universidad Austral de Chile, en particular a Marianna, María Eliana y Jorge, a Vero y al Director Luis Álvarez, por todo su apoyo y motivación.

Finalmente, gracias a las autoridades del programa de Doctorado en Software y Sistemas de la Universidad Politécnica de Madrid y a las autoridades de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Austral de Chile por el apoyo encontrado cada vez que fue requerido.

Índice general

<i>Resumen</i>	8
<i>1.. Introducción</i>	12
<i>2.. Métodos de cálculo de vectores de prioridad a partir de una matriz de comparación por pares</i>	16
2.1. Introducción	16
2.2. Matrices de comparación por pares	17
2.3. Cálculo de vectores de prioridad. Aproximación consistente de matrices de comparación por pares	22
2.3.1. Aproximación consistente. Problema sub-optimal	27
2.3.2. Aproximación log-consistente	30
2.3.3. Algoritmos de cálculo	33
<i>3.. Estudio comparativo de métodos de cálculo de vectores de prioridad a partir de una matriz de comparación por pares</i>	37
3.1. Introducción	37
3.2. Descripción de los experimentos. Generación aleatoria de matrices de comparación por pares	41
Generación de muestras de PCM. Caso $n = 4$	43
Generación de muestras de PCM. Casos $n = 6$ y $n = 8$	44
3.3. Descripción de los experimentos. Medidas de error y análisis	47
3.4. Resultados del experimento 1. Evaluación de métodos de priorización en función de la inconsistencia. Caso $n = 4$	48
3.4.1. <i>Desviación Máxima</i> (DVMAX), caso $n = 4$	49
3.4.2. <i>Desviación Media Absoluta</i> (MAD), caso $n = 4$	50
3.4.3. <i>Error Medio Cuadrático</i> (RMSE), caso $n = 4$	50
3.4.4. <i>Desviación Booleana</i> (MMBD), caso $n = 4$	53
3.4.5. <i>Desviación Media</i> (MD), caso $n = 4$	56
3.5. Resultados del experimento 2. Evaluación de métodos de priorización en función de la inconsistencia. Caso $n = 6$	58
3.5.1. <i>Desviación Máxima</i> (DVMAX), caso $n = 6$	59

Índice general

3.5.2.	<i>Desviación Media Absoluta (MAD), caso $n = 6$</i>	59
3.5.3.	<i>Error Medio Cuadrático (RMSE), caso $n = 6$</i>	62
3.5.4.	<i>Desviación Booleana (MMBD), caso $n = 6$</i>	63
3.5.5.	<i>Desviación Media (MD), caso $n = 6$</i>	65
3.6.	Resultados del experimento 3. Evaluación de métodos de priorización en función de la inconsistencia. Caso $n = 8$	68
3.6.1.	<i>Desviación Máxima (DVMAX), caso $n = 8$</i>	68
3.6.2.	<i>Desviación Media Absoluta (MAD), caso $n = 8$</i>	68
3.6.3.	<i>Error Medio Cuadrático (RMSE), caso $n = 8$</i>	70
3.6.4.	<i>Desviación Booleana (MMBD), caso $n = 8$</i>	73
3.6.5.	<i>Desviación Media (MD), caso $n = 8$</i>	76
4..	<i>Cálculo de vectores de prioridad en problemas de grupo con datos intervalares</i>	78
4.1.	Introducción	78
4.2.	Formulación general del problema	82
4.2.1.	Problema de optimización vectorial en un espacio métrico de matrices	82
4.2.2.	Problema de optimización escalar. Marco analítico	87
4.3.	Formulación GP general. Algoritmos de cálculo	91
4.3.1.	Resolución del problema de grupo con datos puntuales	91
	Casos particulares de la formulación GP. Problema log-consistente	94
	Casos particulares de la formulación GP. Problema sub-optimal	99
4.3.2.	Resolución del problema de grupo con datos intervalares	104
	Casos particulares de la formulación GP intervalar. Problema log-consistente	110
	Casos particulares de la formulación GP intervalar. Problema sub-optimal	116
5..	<i>Casos especiales. Variantes en el cálculo del vector de prioridad de grupo</i>	124
5.1.	Introducción	124
5.2.	Cálculo de vectores de prioridad de grupo a partir de información incompleta	125
5.2.1.	Matrices de comparación por pares incompletas	127
5.2.2.	Método de cálculo de un vector de prioridad de grupo con información incompleta	127
5.3.	Cálculo de un vector de prioridad de grupo atendiendo a la consistencia de los expertos	132

Índice general

5.3.1.	Grado de consistencia de una matriz de comparación por pares	133
5.3.2.	Método de cálculo de un vector de prioridad de grupo atendiendo a la consistencia	136
	Formulación computacional y ejemplo numérico	138
5.4.	Cálculo de un vector de prioridad atendiendo a la imprecisión de los datos	140
5.4.1.	Grado de imprecisión de los elementos de una matriz de comparación por pares intervalar	141
5.4.2.	Método de cálculo de vectores de prioridad de grupo atendiendo a la imprecisión de los datos	143
6..	<i>Conclusiones y líneas futuras de investigación</i>	148
7..	<i>Referencias</i>	150
 <i>Anexos</i>		163
A..	<i>Códigos de algoritmos para generación aleatoria de matrices</i>	164
A.1.	todo4x4.m	164
A.2.	autovaloresn4.prg	165
A.3.	genmatn6triang.prg	166
A.4.	av_n6.m	171
A.5.	autovalores_n6.prg	172

RESUMEN

El problema de análisis y determinación de los pesos de un conjunto de alternativas atendiendo a su relevancia a partir de información proveniente de múltiples fuentes es un aspecto crítico en áreas como la toma de decisiones, la recuperación de información, sistemas de recomendación, teoría de la elección social, democracia electrónica, reconocimiento de patrones, etc. En este trabajo, se considera el problema en el contexto de la teoría de la decisión de grupo. Se trata de obtener un vector de prioridad correspondiente a un conjunto de alternativas a partir de información de preferencias proporcionada individualmente por un grupo de expertos.

Se asume que cada experto expresa sus preferencias acerca de las alternativas mediante matrices de comparación por pares (PCM), técnica ampliamente utilizada en este campo. Por otra parte, en muchas aplicaciones no es posible cuantificar numéricamente la información de preferencias de manera precisa, atendiendo a cuestiones intangibles, vaguedad o imprecisión en los juicios, falta de información, etc., Por ello, se consideran PCM con datos intervalares como una forma flexible de expresión de preferencias.

Este trabajo se centra en el problema de cálculo de un vector de prioridad de un conjunto de alternativas, a partir de la información, posiblemente en conflicto e imprecisa dada por un grupo de expertos en forma de matrices de comparación por pares intervalares.

En primer lugar, se desarrollan métodos de cálculo del vector de prioridad a partir de una matriz de comparación por pares, bajo un enfoque de aproximación consistente de matrices. Se proponen dos formulaciones alternativas: una aproximación consistente sub-optimal y una aproximación consistente logarítmica o log-consistente. Como métricas de distancia específicas, se utilizan las normas vectoriales l_p y algunas normas matriciales usuales. Se proporcionan algoritmos de resolución, mediante el uso de formulaciones de programación por metas (goal programming).

Los métodos presentados son evaluados mediante un análisis comparativo basado en la generación de clases de PCM aleatorias, con índices de inconsistencia en rangos de valores prefijados. El estudio consiste en el análisis del comportamiento de los métodos al ser aplicados a matrices de entrada con distintos niveles de inconsistencia, atendiendo a diferentes medidas de error que comparan la PCM

de entrada con la matriz de ratios generada a partir del vector de prioridad obtenido como salida de los métodos.

En segundo lugar se estudia el problema de grupo con datos intervalares. En este escenario nos enfrentamos con diferentes problemas: el problema de inconsistencia de las PCM, el problema de agregación de las preferencias de varios expertos y el problema de manejo de la imprecisión. Para abordar simultáneamente estos problemas, se presenta un marco teórico general para el cálculo y análisis de vectores de prioridad para un conjunto de matrices intervalares. Se propone un enfoque de optimización vectorial en un espacio métrico de matrices. Se consideran diferentes técnicas de escalarización para articular diferentes estrategias de agregación de información. Se proponen métodos y algoritmos de resolución de los problemas de optimización planteados, a partir de formulaciones que utilizan goal programming intervalar, para las métricas de distancia definidas por normas vectoriales y normas matriciales usuales.

Finalmente, se profundiza en el estudio de casos específicos, proporcionando modelos y algoritmos para algunos tipos de matrices y de datos. Se aborda el problema de información incompleta y datos no homogéneos (datos con diferentes grados de precisión o diferente grado de consistencia), que son situaciones comunes y de interés en este campo.

El desarrollo de este trabajo, ha contado con el apoyo de los proyectos de investigación MTM2007-67232, Ministerio de Educación y Ciencia y MTM2010-18057, Ministerio de Ciencia y Tecnología de España.

ABSTRACT

The problem of importance weights analysis and determination from multiple source information is a critical issue in many fields such as decision-making, information retrieval, recommender systems, social choice theory, e-democracy, patterns classification, etc. We consider the problem in the context of group decision theory, where a set of alternatives have to be ranked by retrieving a weight vector from the preference information provided individually by a group of experts.

We assume each expert expresses his preference on the alternatives into the form of pairwise comparison matrix (PCM), which is a well-established technique in this field. On the other hand, in many applications, due to the estimation inaccuracies, lack of knowledge, imprecise assessments, etc., the information can not be assessed precisely in a quantitative form, so we consider interval data as a flexible way for expressing preferences. This work focuses on the problem of computing the overall preference weights (priority vector) of a set of alternatives from the possibly conflicting imprecise information given by a group of experts into the form of interval pairwise comparison matrices.

For this, first, methods for deriving a priority vector from a PCM, under an approach based on consistent matrix approximation, are developed. Two alternative formulations are proposed: a sub-optimal consistent approach and a logarithmic consistent (or log-consistent) approach. As specific distance metrics are used the standard vector norms l_p and some matrix norms induced by vector norms. Algorithms for solving the problem are formulated using goal programming techniques.

The presented methods presented are further evaluated through a comparative analysis based on the generation of large sets of random pairwise comparison matrices, which are grouped according to an inconsistency index. The study consists in analyzing the behaviour of the methods when they are applied to input matrices with different levels of inconsistency. This study is performed by calculating error measures of the differences between the input PCM and the predicted ratio matrix given by the derived priority vector.

Second, the group problem with interval data is addressed. In this scenario, we face with different problems: the problem of PCM inconsistency, the problem of aggregating the preferences from multiple experts and the problem of imprecision

management. We present a general theoretical framework for deriving priority vectors from a set of interval matrices. It uses a vector optimization approach in a metric space of matrices. Different scalarization techniques are considered to articulate different group strategies of information aggregation. Some methods and algorithms for solving the optimization problems are developed using interval goal programming under specific vector distance metrics and matrix norms.

Finally, we deep inside the study of specific cases, providing models and algorithms for some type of matrices and data. We address the problem of incomplete information and non-homogeneous data (data with different precision degree or different consistency degree) which are common situations of interest in this field.

This research has been partially developed in the framework of the research projects MTM2007-67232, Ministerio of Educación y Ciencia and MTM2010-18057, Ministerio of Ciencia y Tecnología of Spain.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de pesos de un conjunto de alternativas atendiendo a su importancia o relevancia respecto de uno o varios criterios, es un problema crítico en muchos campos como el de buscadores de páginas web, clasificación de patrones, teoría de la decisión, personalización de servicios, etc. La complejidad de los problemas reales en los que surge el problema hace, que frecuentemente se considere información proveniente de distintas fuentes o de un grupo de expertos, decisores o agentes. En este trabajo se aborda el problema en el contexto de la teoría de la decisión de grupo. En [TA98] se establecen algunas ventajas del trabajo en grupo respecto al trabajo individual, entre las que se destacan las mayores posibilidades de generación de conocimiento y la tendencia al equilibrio de las decisiones asumidas colectivamente.

El análisis de las decisiones de grupo se aplica en un amplio espectro de campos como la teoría de la elección social, la personalización de servicios, e-democracy, la economía, la gestión de recursos naturales, etc. Su objetivo es facilitar y automatizar el proceso de toma de decisiones de un grupo proporcionando, por un lado, modelos que permitan estructurar la información y el análisis de la decisión y por otro, diseñar procedimientos para extraer una decisión representativa del grupo. Los investigadores en el área se enfrentan hoy en día con grandes retos ([RT08]), como el tratamiento de gran cantidad de información proveniente de distintas fuentes y/o individuos, el tratamiento de datos de diferente naturaleza: cualitativos, cuantitativos, imprecisos, incompletos, etc. y la necesidad de aplicación de nuevas tecnologías.

Este trabajo se centra en el problema de cálculo y análisis de vectores de prioridades o pesos de un conjunto de alternativas, objetos, criterios (en adelante nos referiremos a ellos como alternativas), a partir de la información de preferencias, posiblemente en conflicto, formulada individualmente por expertos, decisores o agentes (en adelante nos referiremos a ellos como expertos) de un grupo.

Como modelo formal para representar la información de preferencias de partida, adoptaremos el de las relaciones de preferencia multiplicativas, que se expresan mediante matrices de comparación por pares ([Saa80]). El uso de este modelo matricial es uno de los más extendidos, por su simplicidad y por ser la base del método de decisión Analytic Hierarchy Process (AHP), desarrollado por T. Saaty ([Saa80]), ampliamente utilizado en multitud de áreas. Así el problema que se

1. INTRODUCCIÓN

considera es, dado un conjunto finito de alternativas y un grupo de expertos que formulan sus preferencias sobre las alternativas en términos de matrices de comparación por pares, proporcionar métodos que generen el vector de prioridades que mejor refleje las preferencias del grupo.

Por otra parte, uno de los puntos críticos a resolver en problemas reales es el de la cuantificación de la información de preferencias. En muchas aplicaciones, debido a la falta de información o información parcial, a preferencias cualitativas, formuladas mediante etiquetas lingüísticas, difícilmente cuantificables o expresables mediante valores puntuales numéricos, etc. nos enfrentamos a que la información de preferencias dada por los expertos puede ser vaga o imprecisa. Parece natural intentar representar este tipo de información y adaptar los procedimientos para que trabajen con datos imprecisos. Por ello, en este trabajo se considerarán matrices de comparación por pares intervalares, como modelo para representar preferencias imprecisas ([SV87]). En [BJ00], se plantean varias razones que justifican el uso de datos intervalares. Además, en los problemas de decisión de grupo a considerar, la utilización de valores intervalares proporciona una mayor flexibilidad, lo que tiene una interpretación asociada a la tolerancia, como aporte a la búsqueda de una solución compromiso del grupo.

Así el problema central del trabajo es el cálculo y análisis de vectores de prioridad de grupo que reflejen lo mejor posible, en un sentido preciso, la información de preferencias expresada en un conjunto de matrices de comparación por pares intervalares. En este contexto nos enfrentamos a varios problemas:

- Problema de la inconsistencia: En aplicaciones reales, atendiendo a la complejidad del problema, juicios intangibles y falta de información, las matrices de comparación por pares carecen, en general, de las propiedades normativas de reciprocidad y consistencia. El problema que se plantea es cómo derivar pesos de prioridad a partir de matrices que carecen de estas propiedades.
- Problema de grupo: En general, para representar mejor la naturaleza compleja del problema, se supone que la información es no homogénea, proviene de diferentes fuentes, expertos con diferentes perspectivas e intereses. En este contexto, surgen situaciones de conflicto, información incompatible y en general no existe una solución óptima de consenso. El reto que se plantea es generar un vector de prioridades que sea el que mejor represente (en un sentido preciso) las múltiples preferencias del grupo.
- Tratamiento de la imprecisión. Atendiendo a la subjetividad en los juicios, la falta de información, el uso de escalas de cuantificación discretas, se plantea la necesidad de manejar datos imprecisos, en este caso en forma de datos intervalares.

1. INTRODUCCIÓN

En primer lugar, se aborda el estudio del problema, bajo el supuesto de decisiones en las que participa sólo un experto, trabajando con matrices cuyos elementos son datos numéricos puntuales. El problema se formula en un marco teórico de aproximación matricial que conduce a un problema de optimización. Se consideran dos técnicas, una basada en la transformación logarítmica de los datos y otra basada en la consideración de un problema sub-optimal asociado al problema original. Se proporcionan métodos que resuelven el problema de cálculo del vector de prioridad, considerando tanto su formulación matricial, como una formulación basada en programación matemática que hace posible su implementación computacional para los tipos más usuales de normas matriciales.

En este mismo escenario, se presenta un exhaustivo estudio comparativo de los principales métodos de obtención de un vector de prioridad a partir de una matriz de comparación por pares. Para efectos del análisis comparativo, se define un conjunto de métricas relevantes, ampliando y complementando las establecidas en la literatura. El diseño del experimento se apoya en un procedimiento que controla la consistencia de una amplia colección de matrices generadas aleatoriamente para varias dimensiones.

Una vez analizado el problema para el caso de un experto, con datos puntuales, se aborda el problema de grupo (se asume la existencia de más de un experto) con datos intervalares. Las dificultades asociadas a este tipo de problemas son la inconsistencia, la posible incompatibilidad entre las preferencias de distintos expertos del grupo y el problema del manejo de la imprecisión. El problema se formula en un marco general, como problema de optimización vectorial en un espacio normado de matrices. Para abordar el problema de optimización vectorial se consideran distintas técnicas de escalarización que articulan las estrategias de agregación de la información. El marco que se propone integra y extiende varias líneas actuales de investigación del problema. Además, relaja condiciones y restricciones al problema que se asumen en los métodos proporcionados en la literatura. Los problemas de optimización con datos intervalares que resultan para las normas matriciales más usuales, se resuelven mediante el uso de técnicas de programación por metas (*Goal Programming*, GP).

Por último, se estudian casos particulares de especial relevancia en el contexto de los problemas de decisión de grupo. En primer lugar, se aborda el problema del cálculo del vector de prioridad a partir de información incompleta. Se plantean las condiciones para la existencia de la solución y se proporciona un método para su obtención.

Por otra parte, se estudia el caso de cálculo del vector de prioridad atendiendo a la consistencia de los expertos y se presenta un método basado en el cálculo del "grado de consistencia" de cada experto.

Finalmente, se aborda el problema de cálculo de un vector de prioridad, atendiendo a la precisión de los datos de las matrices de comparación por pares inter-

1. INTRODUCCIÓN

valares. En este caso, se define el concepto de grado de imprecisión de un dato intervalar y se proporciona un método de cálculo que considera el grado de imprecisión de los datos.

La memoria del trabajo se ha estructurado de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se introducen los principales conceptos y resultados teóricos relativos a las matrices de comparación por pares. Se presentan también los métodos de cálculo de vectores de prioridad a partir de una matriz de comparación por pares. El Capítulo 3 contiene un estudio comparativo de los principales métodos de cálculo de un vector de prioridad a partir de una matriz de comparación por pares. El problema de grupo con datos intervalares se aborda en el Capítulo 4, presentando el marco teórico, los métodos propuestos y los algoritmos de resolución del problema. En el Capítulo 5 se estudian casos especiales de especial interés. Por último, se incluyen las principales conclusiones derivadas del trabajo y posibles líneas futuras de investigación.

2. MÉTODOS DE CÁLCULO DE VECTORES DE PRIORIDAD A PARTIR DE UNA MATRIZ DE COMPARACIÓN POR PARES

2.1. *Introducción*

Sea un conjunto de alternativas $\{x_1, \dots, x_n\}$ que tienen que ser ordenadas atendiendo a su importancia respecto de un criterio común. Se considera el caso en que el cálculo de los pesos de cada alternativa se debe realizar a partir de la información de preferencias proporcionada por un experto. Un paso crítico en el problema de cálculo de pesos de un conjunto de alternativas atendiendo a su relevancia, en el contexto de la Teoría de la Decisión, es cómo cuantificar la importancia de preferencias de un experto. En problemas reales, cuando el conjunto de alternativas a valorar es moderadamente grande y debido a subjetividad en los juicios, cuestiones intangibles, etc., es difícil cuantificar los juicios de preferencias considerando todas las alternativas simultáneamente. El método de comparaciones por pares proporciona una herramienta útil al permitir trabajar con pares de alternativas y datos relativos. Por esta razón, y como se menciona en [JLYY08] el uso de métodos basados en matrices de comparación por pares se ha hecho muy popular en psicología estadística, en teoría de la elección social ([Thu27b], [KS40], [Dav88], [Saa77], [Arr51]), en la resolución de problemas de clasificación en el área del aprendizaje automático ([FISS03], [HT98], [HGO00], [Tri00]), etc.

El concepto de comparación por pares fue introducido en la década de 1780, primero por J.C. Borda y luego por M. Condorcet, en respectivos artículos de aplicación de técnicas matemáticas a procesos de elección social, como una relación entre dos elementos de un ranking construido a partir de preferencias individuales [Boz06]. El mismo autor menciona, entre los antecedentes relativos a las comparaciones por pares, su utilización en psicología experimental a mediados del siglo XIX y en la década de 1920. El modelo conocido como "Ley del Juicio Comparativo" desarrollado por L.L. Thurstone en 1927 ([Thu27a]) tuvo la importancia de generalizar algunos modelos de la psicofísica, a casos en que la escala en la que se miden los atributos es construida sin una correspondencia a un atributo extensivo. Además, abrió la puerta a la cuantificación de atributos sociales y la argumentación estadística de estudios empíricos, en el campo de la psicología social ([HLLPM06]).

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

En este capítulo se incluyen los fundamentos teóricos las matrices de comparación por pares (PCM, por sus iniciales en inglés, *pairwise comparison matrix*), que serán el modelo de representación de preferencias adoptado en este trabajo. A continuación, se abordará el estudio de los métodos de cálculo de un vector de pesos a partir de la información de preferencias contenida en una PCM. Estos métodos se pueden clasificar en dos grandes grupos: métodos basados en propiedades espectrales de la matriz y métodos basados en distancias.

En este trabajo se formula el problema en un marco teórico de aproximación matricial que incluye los principales métodos basados en distancias dados en la literatura. Para abordar la resolución del problema general, se definen dos metodologías: una basada en la transformación logarítmica de los datos y otra en la consideración de un problema sub-optimal asociado al problema original. Como último paso, se proponen algoritmos efectivos de resolución de los problemas resultantes, para las métricas más usuales.

2.2. Matrices de comparación por pares

El método de la comparación por pares es una herramienta ampliamente utilizada en economía, psicometría, teoría de la decisión, etc., que proporciona una forma práctica de representar información de preferencias relativa a n alternativas a partir de la expresión de juicios de preferencias entre pares de ellas [GLD93].

Se considera un conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de n alternativas (con $n \geq 2$) y un experto que desea determinar la importancia relativa de estas alternativas respecto de un criterio común.

Definición 1 *Una relación de preferencias sobre un conjunto de alternativas X está definido por una función $\mu : X \times X \rightarrow D$, donde D es el dominio de representación de los grados de preferencia.*

Se consideran relaciones de preferencia multiplicativas, en las que el grado de preferencia representa la razón de la intensidad de preferencia dada por el experto, entre las alternativas evaluadas. En la literatura se consideran diferentes tipos de relaciones de preferencias. En este trabajo, se asume que la relación de preferencia es cuantificada usando la escala de Saaty ([Saa80]), escala ampliamente utilizada en modelación de preferencias en el contexto de la Teoría de la Decisión y que es la base del método de decisión multicriterio *AHP* (Analytic Hierarchy Process) ([Saa80]). Esta escala está definida en el intervalo $[1/9, 9]$. $\mu(x_i, x_j) = 1$ indica que el experto asigna la misma importancia a las alternativas x_i y x_j . Cuando $\mu(x_i, x_j)$ toma el mayor valor posible dentro del intervalo, se expresa que el experto prefiere absolutamente la alternativa x_i a la alternativa x_j .

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Una relación de preferencias multiplicativa se representa por una matriz positiva $n \times n$, $M = (m_{ij})$, donde $m_{ij} = \mu(x_i, x_j)$ se interpreta como la razón de intensidad de preferencias de la alternativa x_i respecto a la alternativa x_j , *i.e.* se entiende como que x_i es m_{ij} veces "tan buena" como x_j . En este sentido, $m_{ij} > 1$ indica que la alternativa x_i es preferida a la alternativa x_j . Del mismo modo, $m_{ij} = 1$ representa la indiferencia entre las alternativas x_i y x_j . Si $m_{ij} < 1$ entonces la alternativa x_j es preferida a la alternativa x_i .

Atendiendo a como se generan las matrices que representan relaciones de preferencias multiplicativas, varias son las propiedades que se esperan en dichas matrices.

Sea $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ la clase de matrices $n \times n$ que contienen elementos positivos.

Definición 2 Una matriz $M \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ (o una matriz cuadrada positiva M de orden n) se denomina *recíproca* si $m_{ij}m_{ji} = 1$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Si la matriz es recíproca, se representa de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ \frac{1}{m_{12}} & 1 & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ \frac{1}{m_{13}} & \frac{1}{m_{23}} & 1 & \dots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m_{1n}} & \frac{1}{m_{2n}} & \frac{1}{m_{3n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad (2.1)$$

Se hace notar que si la matriz M es recíproca, se establece que a la comparación de una opción consigo misma se le asigna el valor 1. En una matriz recíproca, si la preferencia del i -ésimo elemento sobre el j -ésimo elemento está dada por el valor m_{ij} , entonces la preferencia del j -ésimo elemento sobre el i -ésimo elemento será $\frac{1}{m_{ij}}$. Considerando las propiedades de una matriz de comparación por pares (en adelante PCM, por sus iniciales en inglés) recíproca, la evaluación de n opciones, puede ser escrita a partir de $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaciones.

El concepto de matrices de comparación por pares recíprocas fue introducido (Teoría de la Decisión Multicriterio) por Saaty ([Saa77]). En dicho marco, Saaty asume que las matrices de comparación por pares son, por defecto, recíprocas. A lo largo de este trabajo, no se asume esta propiedad por defecto en las matrices de comparación por pares.

Definición 3 Una matriz $M = (m_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ cuyos elementos satisfacen:

$$m_{ij}m_{jk} = m_{ik} \quad (2.2)$$

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

para todo $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, se denomina matriz de comparación por pares consistente. En otro caso, si no cumple la propiedad (2.2) para algún $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, se dirá que la matriz es inconsistente.

Las matrices consistentes también son denominadas por algunos autores *matrices transitivas* ([FGR04]).

Cabe destacar que si una matriz de comparación por pares cumple la propiedad de consistencia, entonces necesariamente es recíproca.

Las preferencias en la matriz de comparación por pares representan estimaciones de los cocientes de los pesos de las alternativas consideradas. En este sentido, m_{ij} es una estimación de w_i/w_j , donde w_i y w_j son los pesos de la alternativa i y j , respectivamente. En el caso ideal, dichas matrices serán consistentes, es decir, $m_{ij} = w_i/w_j$ con $i, j = 1, \dots, n$.

Sin embargo, en problemas reales, atendiendo a la complejidad del problema y a la subjetividad inherente a los juicios humanos, las matrices de comparación por pares pueden carecer de la propiedad de consistencia.

Los métodos que utilizan PCM involucran la expresión de juicios de preferencias en términos de números. Por lo tanto, una cuestión de gran interés es la determinación del dominio D . En general las comparaciones pareadas se cuantifican utilizando una escala. La escala viene dada por un conjunto discreto de valores numéricos que representan, en general, un conjunto discreto de valores.

En [Tri00] se plantean como conceptos relativos a las matrices de comparación por pares, las matrices reales continuas (matrices *RCP*, del inglés *Real Continuous Pairwise*) y las matrices discretas más próximas (matrices *CDP*, del inglés *Closest Discrete Pairwise*). Las matrices *RCP* son aquellas en que la entrada m_{ij} representa el valor real - y desconocido - de la comparación de la opción i con la opción j , que corresponde al cociente w_i/w_j . Aún cuando la matriz *RCP* es desconocida, se asume que el experto que emite los juicios de preferencias puede determinar el valor más cercano para cada entrada de la matriz *RCP*, a partir de un conjunto discreto de valores correspondientes a la escala que se está utilizando. La matriz que se construye a partir de los valores discretos de la escala, es la matriz *CDP*. La elección de la escala es un aspecto importante en el uso de las comparaciones, ya que proporcionan la forma de cuantificar las preferencias formuladas lingüísticamente por quien emite los juicios de preferencia, durante la evaluación de las comparaciones. Así, la escala relaciona cada etiqueta lingüística de entre un conjunto discreto de opciones, con un conjunto de valores numéricos que representan el peso o importancia de aquellas opciones lingüísticas.

El mismo autor describe dos enfoques asociados a la configuración de las escalas de cuantificación de preferencias relativas: el enfoque basado en la escala lineal propuesta por Saaty ([Saa77]), y el enfoque de las escalas exponenciales, a partir de las propuestas planteadas en [Loo88]. Es relevante destacar que es-

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

tas escalas deben reflejar intensidades de preferencia discretas, relacionadas con opciones lingüísticas claramente diferenciables por quien emite su opinión.

Probablemente, la escala más ampliamente utilizada es la definida en el contexto del Método Jerárquico Analítico (Analytic Hierarchy Process, AHP), desarrollado por Thomas L. Saaty [Saa80], [Saa77]. Dicha escala está definida sobre el intervalo $[1/9, 9]$ y los posibles valores se muestran en la Tabla 2.1.

Tab. 2.1: Descripción de la escala de Saaty

Intensidad de preferencia	Definición	Explicación
1	Indiferencia	Las dos opciones son igualmente importantes para el experto
3	Importancia débil	La experiencia del experto determina que una alternativa es ligera o débilmente más importante que la otra
5	Importancia esencial o fuerte	El experto tiene una preferencia clara o marcada de una alternativa sobre la otra
7	Importancia demostrada	El experto tiene una fuerte preferencia de una alternativa sobre la otra y esta dominancia está demostrada en la práctica
9	Importancia absoluta	La evidencia para favorecer una alternativa sobre la otra es la máxima posible
2, 4, 6, 8	Valores intermedios entre dos juicios sucesivos	Cuando es necesaria una mayor definición o precisión en la formulación de los juicios
Valores recíprocos de los anteriores		Si la comparación de la alternativa i con la alternativa j tiene uno de los valores anteriores, entonces la comparación de la alternativa j con la alternativa i tendrá el valor recíproco

A continuación se presentan algunos resultados importantes relativos a las matrices de comparación por pares ([Boz01], [Saa77]), que serán de gran interés para el desarrollo del trabajo.

Sea M es una matriz cuadrada $n \times n$, $\rho(M)$ denota el *radio espectral* de M , esto es:

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } M\} \quad (2.3)$$

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Teorema 2.2.1 (Perron) ([BP94], Theorem 1.4, Theorem 1.1) Sea M una matriz $n \times n$ positiva. Entonces, $\rho(M)$ es un autovalor simple de M . Además dicho autovalor tiene un autovector asociado con componentes positivas.

Se hace notar que si M es una matriz recíproca, automáticamente verifica el resultado anterior. En este caso existe un autovalor real dominante, que denominaremos λ_{max} , tal que $\lambda_{max} = \rho(M)$. Además, dicho autovalor tiene asociado un autovector con componentes positivas.

Teorema 2.2.2 [Saa77] Sea M una matriz $n \times n$ recíproca. Entonces:

- $\rho(M) \geq n$
- $\rho(M) = n$ si y sólo si M es consistente.

La demostración para $\rho(M) \geq n$ se plantea en ([Saa80],[Boz06]).

Una matriz cuadrada $M = (m_{ij})$ de orden n es una matriz de rango uno ([FR01]) si sus elementos m_{ij} se pueden expresar en la forma:

$$m_{ij} = p_i q_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Esto es, M se puede expresar como producto de un vector columna p y un vector fila q^t :

$$M = p q^t \quad (2.5)$$

con $q^t = (1, x_1, \dots, x_{n-1})$ y $p^t = (1, \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_{n-1}})$

Teorema 2.2.3 ([FRS99]) Sea M una matriz $n \times n$, con $n \geq 3$.

- Si M es consistente, entonces el rango de M es 1.
- Si M es una matriz recíproca, entonces M es consistente si y sólo si el rango de M es 1.

El problema de encontrar un vector de pesos $w \in \mathbb{R}^n$, tal que verifique

$$Mw = nw \quad (2.6)$$

tiene solución si y sólo si n es autovalor de la matriz M . Atendiendo a los resultados anteriores, existe un vector de pesos positivos w si y sólo si la matriz M es consistente. En este caso, $m_{ij} = w_i/w_j$, $\forall i, j$ y w es un autovector asociado al autovalor dominante n . Además, por ser M una matriz de rango 1 (M consistente) cualquier columna de M es solución del problema (2.6). Estas soluciones difieren

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

en una constante multiplicativa. Sin embargo, es deseable tener soluciones normalizadas cuyas componentes sumen 1. En este caso, la solución w positiva es única y se denominará *vector de pesos* o *vector de prioridad*.

En problemas reales de toma de decisiones, se trabaja en general con matrices CDP que raramente son consistentes. En tales casos, es importante conocer el "nivel de consistencia" de los juicios, para evitar trabajar con juicios con una consistencia tan baja que - por ejemplo - aparezcan como juicios aleatorios ([Boz01]). De este modo, se plantea cómo medir la inconsistencia, atendiendo a que pequeñas variaciones en m_{ij} implican una variación pequeña en λ_{max} . Saaty propuso un *índice de consistencia (CI)* para matrices recíprocas (o PCM), que expresa m_{ij} como la perturbación del cociente $(w_i/w_j)\epsilon_{ij}$:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \left[\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right] \quad (2.7)$$

Si M es una matriz recíproca, como $\lambda_{max} \leq n$, CI siempre es no negativo, además $CI = 0$ si y sólo si M es consistente. Por otra parte, se define el *índice de consistencia aleatorio medio (RI)* como el valor esperado del índice de consistencia, calculado a partir de matrices de tamaño $n \times n$ positivas, recíprocas, y con sus elementos generados aleatoriamente desde los valores de la escala de Saaty:

$$RI = \frac{\bar{\lambda}_{max} - n}{n - 1} \quad (2.8)$$

en que $\bar{\lambda}_{max}$ es el valor esperado de λ_{max} .

Así, se define el cociente de consistencia o índice de consistencia relativo (CR) de una PCM como:

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (2.9)$$

De este modo, valores pequeños para CR indicarán desviaciones reducidas de la consistencia. Saaty [Saa80] sugiere como matrices aceptables, aquéllas cuyo CR tiene un valor menor o igual al 10 %.

2.3. Cálculo de vectores de prioridad. Aproximación consistente de matrices de comparación por pares

El problema al que nos enfrentamos es el de determinar los pesos de prioridad o importancia de las alternativas x_1, \dots, x_n respecto de un criterio. Para ello, supondremos que disponemos de la información de preferencias asignadas a las alternativas por un experto mediante una matriz de comparación por pares $M = (m_{ij})$. En este contexto se trata de obtener un vector de pesos positivo

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

$w^t = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, tal que $w_i > 0$ indique el peso de la alternativa x_i que induce sobre el conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un orden débil \geq_w dado por:

$$m_i \geq_w m_j \iff w_i \geq w_j \quad , \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Supondremos que el vector w verifica la condición de normalización $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. En adelante, a este vector de pesos normalizado le denominaremos *vector de prioridad*.

Los métodos para estimar vectores de prioridad a partir de una matriz de comparación por pares M , atienden principalmente a dos enfoques: métodos basados en el autovector principal y métodos basados en distancias.

Como se ha indicado anteriormente, si la matriz M es consistente, aplicando el Teorema 2.2.2 se concluye que existe un vector de prioridad $w = (w_i)^t$, tal que:

$$m_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Además w es el autovector positivo normalizado ($\sum_{i=1}^n w_i = 1$) asociado al autovalor dominante (n) de la matriz M .

En general, en problemas reales, debido a las características subjetivas de los juicios humanos y a la simplificación que supone el modelo matemático de la realidad, la matriz M no es consistente. Además, se trabaja con matrices CDP cuyos elementos toman valores de una escala prefijada.

El método del autovector principal propone como vector de pesos el autovector normalizado correspondiente al autovalor λ_{max} de la matriz M . De acuerdo al *Teorema de Perron* (2.2.1), el autovalor λ_{max} es positivo y real. Además, el vector w puede elegirse con todas las coordenadas positivas.

La técnica descrita es la de uso más extendido en este contexto por ser la base del método de decisión multicriterio AHP.

Por otra parte, los métodos basados en distancias tienen como objetivo determinar el vector de prioridad $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ que mejor refleje (en alguna distancia) la información de preferencias contenida en la matriz M .

La idea es considerar la matriz M como una perturbación de una matriz ideal consistente W . De esta forma, el problema se puede plantear en términos de encontrar la matriz consistente W que "mejor aproxime" (en un sentido que se precisará), a la matriz M ([CK88]). Esto nos conduce a la noción de métrica, de una función que mida la distancia entre la matriz dada por el experto y las matrices que verifiquen las propiedades normativas de consistencia. Es por ello que proponemos el marco general de aproximación de matrices como entorno natural para plantear el problema.

Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial ([YG73]). Consideramos el espacio métrico $(\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|)$ de las matrices cuadradas $n \times n$, dotado de la distancia inducida por

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

la norma matricial $\|\cdot\|$. En este contexto, dada la matriz de comparación por pares M , el problema es encontrar una matriz $n \times n$ consistente W que esté "lo más cerca posible" de la matriz M en la métrica dada. Esto es, consideramos el problema de encontrar una matriz $W^* \in \mathcal{C}_n$, siendo $\mathcal{C}_n = \{W : W \text{ matriz } n \times n \text{ consistente}\}$, tal que esté "lo más próxima" posible a la matriz M en una métrica considerada. Así, se trata de encontrar $W^* \in \mathcal{C}_n$ tal que

$$\|M - W^*\| = \min_{W \in \mathcal{C}_n} \|M - W\| \quad (2.12)$$

donde \mathcal{C}_n es el conjunto de matrices $n \times n$ consistentes.

Atendiendo a los resultados teóricos incluidos en la Sección 2.2, cualquier matriz consistente W tiene rango 1 y se puede escribir de la forma

$$W = D_w E (D_w)^{-1} = (w_i / w_j)_{i,j=1}^n \quad (2.13)$$

donde $E = (e_{ij})$ con $e_{ij} = 1$, $1 \leq i, j \leq n$ y $D_w = (d_{ijw})$ es una matriz diagonal con

$$d_{ijw} = \begin{cases} w_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.14)$$

para algún vector $w = (w_i)^t \in \mathbb{R}^n$ de componentes positivas y normalizado. Así, el problema (2.12) se puede reescribir en los siguientes términos: Encontrar un vector $w^* \in \mathbb{R}_+^n$ tal que minimice la expresión

$$f(w) = \|M - D_w E (D_w)^{-1}\| \quad (2.15)$$

con $w \in \mathbb{R}_+^n$ y $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Atendiendo a esta formulación, el vector w^* normalizado ($\sum_{i=1}^n w_i^* = 1$) se propone como vector de prioridad.

Se hace notar que si la matriz M es consistente, el autovector w de componentes positivas y que suman 1, asociado al autovalor dominante de M es solución del problema de optimización (2.15).

La formulación del problema ((2.12) y (2.15)) como problema de minimización en un marco teórico general de aproximación matricial, incluye la mayoría de los métodos de cálculo de vectores de prioridad basados en distancias propuestos en la literatura, presentando además, un enfoque flexible alternativo al del método del autovector principal. Por un lado se define la lógica del método, vía la métrica utilizada para la búsqueda del mejor ajuste del modelo a la muestra de preferencias del experto. Por otra parte, este enfoque gran flexibilidad e interés para abordar casos especiales como el de falta de datos. Además, la matriz de partida no requiere verificar la propiedad normativa de reciprocidad.

Planteado el marco teórico del problema, se aborda ahora el desarrollo del problema (2.12) y de técnicas para su resolución. Atendiendo a la gran cantidad

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

de normas posibles, nos centraremos en los casos más usuales. Como una matriz de orden n puede ser tratada como un vector de dimensión n^2 , consideraremos en primer lugar las normas vectoriales l_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Si $M = (m_{ij})$ es una matriz $n \times n$, denotaremos por

$$\|M\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^n |m_{ij}|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.16)$$

y

$$\|M\|_\infty = \max_{i,j=1,\dots,n} \{|m_{ij}|\} \quad (2.17)$$

Se hace notar que la definición 2.17 consistente en aplicar la norma vectorial l_∞ a la matriz como si fuese un vector, no es una norma matricial, al no satisfacer la condición $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$ para cualesquier matrices A y B de orden n . El caso $p = 2$ corresponde a la norma euclídea, también llamada como norma matricial, norma de Frobenius o norma de Schur.

En estas métricas, el problema de optimización (2.12) se formula como:

$$(PO)_p \quad \min_{\substack{w_{ij} > 0 \\ w_{ij} \cdot w_{jk} = w_{ik} \\ \forall i,j,k=1,\dots,n}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij} - w_{ij}|^p \right]^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.18)$$

$$\min_{\substack{w_{ij} > 0 \\ w_{ij} \cdot w_{jk} = w_{ik} \\ \forall i,j,k=1,\dots,n}} \left[\max_{i,j} |m_{ij} - w_{ij}| \right] \quad p = \infty$$

La norma vectorial l_1 se calcula como la suma de los valores absolutos de las desviaciones. La norma l_2 trabaja con los cuadrados de las desviaciones, poniendo más énfasis en las desviaciones mayores. La norma l_∞ refleja sólo la máxima desviación, por lo que seleccionar esta medida en el método, enfatiza el papel de la peor desviación. Las otras normas l_p representan pasos intermedios entre estos dos extremos. Atendiendo a las propiedades vistas en el Teorema 2.2.2, los problemas de optimización anteriores se pueden escribir:

$$(PO)_p \quad \min_{w>0} (f(w))^p = \begin{cases} \min_{w_i>0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(m_{ij} - w_i/w_j)|^p & 1 \leq p < \infty \\ \min_{w_i>0} \left[\max_{i,j} |m_{ij} - w_i/w_j| \right] & p = \infty \end{cases} \quad (2.19)$$

Este problema se ha considerado para el caso particular $p = 2$ en [FLR05], [CW04] y [Boz08]. Un problema análogo se ha considerado para $p = \infty$, trabajando con desviaciones relativas a los datos en un contexto de max-álgebras en [EvdD04].

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Otro tipo de normas matriciales usuales son las normas matriciales inducidas ([YG73]) por alguna norma vectorial l_p . Dada una matriz M $n \times n$, denotaremos por $\|M\|_{mp}$ la norma matricial de M inducida por la norma vectorial l_p y viene dada por

$$\|M\|_{mp} = \min_{\|x\|_p=1} \|Mx\|_p \quad (2.20)$$

Se adopta la notación $\|\cdot\|_{mp}$ para distinguir la norma matricial inducida por la norma vectorial l_p de las definidas en (2.16), que calculan la norma p de la matriz considerándola como un vector de dimensión n^2 . Los casos más usuales de normas matriciales inducidas corresponden a los valores de p igual a 1, 2 e infinito. En estos casos, se demuestra ([Ueb97]) que admiten las siguientes fórmulas de cálculo:

$$\|M\|_{m1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}| \quad (2.21)$$

$$\|M\|_{m2} = (\rho(MM^T))^{1/2} \quad (2.22)$$

$$\|M\|_{m\infty} = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \quad (2.23)$$

donde M^T denota la matriz traspuesta de M . Dada una matriz $M = (m_{ij})$ de comparación por pares, si planteamos el problema de aproximación consistente (2.15) en el espacio métrico definido por la norma matricial inducida por $p = \infty$, resultará el problema de optimización

$$\begin{aligned} (PO)_{m\infty} \quad & \min \|M - D_w E D_w^{-1}\|_{m\infty} \\ & = \min_{\substack{w>0 \\ \sum_{i=1}^n w_i=1}} \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n \left| m_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \end{aligned} \quad (2.24)$$

Se hace notar que al trabajar con esta métrica, para cada alternativa x_i se considera la suma de residuos de las estimaciones de los juicios relativos de dicha alternativa frente al resto de alternativas y se minimiza el peor de los casos.

En relación con la norma matricial uno inducida, se hace notar que

$$\begin{aligned} \|M - D_w E D_w^{-1}\|_{m1} &= \|M^T - D_w^{-1} E D_w\|_{m\infty} \\ \text{y} \quad \|M - D_w E D_w^{-1}\|_{m\infty} &= \|M^T - D_w^{-1} E D_w\|_{m1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por otra parte su interpretación en el contexto del problema de preferencias planteado, no es tan reseñable como el del caso $p = \infty$.

No se desarrolla el problema para el caso específico de la norma matricial inducida 2 o norma espectral, por su dificultad de cálculo y por no tener una interpretación clara en el contexto de problema en estudio.

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Los problemas de optimización planteados anteriormente presentan grandes dificultades de resolución, entre otras se observa que la función objetivo $f(w)$ a minimizar es no lineal, en particular aparece una no linealidad en el término $D_w E(D_w)^{-1}$. Para abordar su resolución, concretamente para eliminar esta dificultad, se va a trabajar con dos tipos de problemas de aproximación (que denominaremos "problema sub-optimal" y "problema optimal logarítmico") asociados al problema (2.15). Estas estrategias se presentan en las siguientes subsecciones.

2.3.1. Aproximación consistente. Problema sub-optimal

Consideramos el problema general formulado en términos de aproximación matricial(2.12),

$$\min_{C \in \mathcal{C}_n} \|M - C\| = \min_{\substack{w \in \mathbb{R}^n \\ w > 0}} \|M - D_w E(D_w)^{-1}\| \quad (2.26)$$

Atendiendo a las propiedades de las normas

$$\|M - D_w E(D_w)^{-1}\| \leq \|(D_w)^{-1}\| \cdot \|MD_w - D_w E\| \quad (2.27)$$

Si denominamos $\tilde{f}(w) = \|MD_w - D_w E\| = \|(m_{ij}w_j - w_i)_{ij}\|$, se concluye

$$f(w) \leq \|D_w^{-1}\| \cdot \tilde{f}(w). \quad (2.28)$$

Atendiendo a la mayor simplicidad de la función $\tilde{f}(w)$ (no incluye el término $D_w E(D_w)^{-1}$) frente a $f(w)$ y a la relación anterior, se plantea sustituir el problema (2.15) por el problema de optimización en términos de la función objetivo \tilde{f} que denominamos sub-optimal,

$$(WPO)_{\|\cdot\|} \quad \min_{w > 0} \tilde{f}(w) = \min_{w > 0} \|MD_w - D_w E\| \quad (2.29)$$

$$\text{sujeto a} \quad w_i > 0$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

$$(2.30)$$

A continuación vemos la expresión explícita de este problema para las principales normas consideradas. En el caso de utilizar la norma vectorial l_p , el problema de minimización resultante es:

$$(WPO)_p \quad \min_{w_i > 0} (\tilde{f}(w))^p = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}w_j - w_i|^p & 1 \leq p < \infty \\ \min [\max_{i,j} |m_{ij}w_j - w_i|] & p = \infty \end{cases} \quad (2.31)$$

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Este problema se ha considerado para el caso $p = 2$ en [FLR03], para $p = 1, 2, \infty$ en [CW04] y para el caso general en [DGP03]. En el trabajo de [JM04] se plantea un problema análogo trabajando con desviaciones relativas de los datos de la matriz:

$$\min_{w_i > 0} \sum_{i,j=1}^n \frac{|m_{ij}w_j - w_i|^p}{|m_{ij}|} \quad (2.32)$$

Se hace notar que para evitar obtener la solución trivial (no válida en términos prácticos), se añade a la función objetivo la condición de normalización de los pesos:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}w_j - w_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \right\} \quad (2.33)$$

Una vez que se ha resuelto el problema de minimización, de nuevo se debe normalizar la solución.

Al problema (2.31) se podría haber llegado también de forma natural en el contexto de resolución l_p de sistemas lineales sobredeterminados ([Wat80]) como se indica a continuación.

Atendiendo al modelo matemático considerado, el dato m_{ij} proporcionado por el experto es una estimación del cociente w_i/w_j de los valores de los pesos desconocidos

$$m_{ij} \approx w_i/w_j \quad (2.34)$$

En el caso ideal, en que la matriz M es consistente

$$m_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \iff m_{ij}w_j - w_i = 0 \quad (2.35)$$

Por tanto, en el caso consistente los pesos buscados son solución positiva del sistema lineal sobredeterminado $\frac{n(n-1)}{2} \times n$

$$\begin{cases} m_{ij}w_j - w_i = 0 & i, j = 1, \dots, n; \quad i \neq j \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases}$$

Escrito matricialmente

$$Bw = b \quad (2.36)$$

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

con

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & m_{12} & & & & \\ -1 & & m_{13} & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -1 & & & & m_{1\ n-1} & \\ -1 & & & & & m_{1n} \\ & -1 & m_{23} & & & \\ & -1 & & \ddots & & \\ & -1 & & & m_{2\ n-1} & \\ & -1 & & & & m_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ & & & & -1 & m_{n-1\ n} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

y

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se hace notar que todos los elementos marcados en blanco en la matriz B (2.37) representan ceros.

La condición de normalización $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ se ha incluido como ecuación para no trabajar con un sistema lineal homogéneo, evitando así la solución trivial que no es solución admisible en nuestro problema.

Si la matriz M es consistente, el sistema lineal (2.36) tiene una única solución positiva w que es el vector de prioridad. En general, en las aplicaciones reales, debido a la complejidad del problema,

y a los factores humanos que influyen en la expresión de preferencias (imprecisión, valoraciones subjetivas, etc.), el sistema (2.36) no es compatible, no tiene solución (M es no consistente). Se busca entonces una solución positiva que sea la que "mejor resuelva" dicho sistema, en el sentido que minimice la norma del error (residuo r). Esto es, se busca $w \in \mathbb{R}^n$ tal que minimice

$$\|r(w)\| = \|Bw - b\|, \quad (2.38)$$

siendo $\|\cdot\|$ una norma vectorial. Una vez obtenida la solución positiva, habría que normalizarla para que sus componentes sumen 1.

Si se consideran las normas vectoriales l_p , se obtienen las soluciones l_p del sistema lineal (2.36) ([Wat80]). El uso de $p = 1$ es especialmente interesante cuando los datos incluyen "errores importantes evidentes", porque el peso efectivo

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

que se les da a dichos valores es menor que al utilizar otra norma l_p con $p > 1$. El caso $p = 2$ corresponde al conocido método de resolución de los mínimos cuadrados de un sistema lineal. El problema con norma $p = \infty$ también llamado norma *Chebyshev*, es el problema también denominado *minimax*.

Por otra parte, si se considera ahora el problema sub-optimal (2.29), trabajando con la norma matricial infinito inducida por la norma vectorial l_∞ , éste adopta la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 (WPO)_{m\infty} \quad & \min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1}^n |m_{ij}w_j - w_i| \quad (2.39) \\
 \text{suje}to \ a \quad & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1.
 \end{aligned}$$

2.3.2. Aproximación log-consistente

Dada una matriz de comparación por pares $M = (m_{ij})$ de orden $n \times n$, nos centramos de nuevo en el problema de calcular una mejor aproximación consistente de M respecto de una norma $\|\cdot\|$, problema planteado en (2.12). Atendiendo a la no linealidad implícita en el conjunto de matrices de comparación por pares y de matrices consistentes, se va a considerar una transformación logarítmica punto a punto de dichas matrices. Se introduce así el conjunto que denominaremos de matrices log-consistentes.

Definición 4 Una matriz $L = (l_{ij})$ $n \times n$ se denomina matriz log-consistente si verifica

$$l_{ij} + l_{jk} = l_{ik}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (2.40)$$

Al conjunto de matrices de orden $n \times n$ log-consistentes le llamaremos \mathcal{LC}_n . El principal beneficio de esta transformación es que el conjunto de las imágenes transformadas de matrices consistentes de dimensión n tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $n - 1$ ([KO99]). Además, si $L = (l_{ij})$ es una matriz log-consistente, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$l_{ij} = v_i - v_j, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.41)$$

Se hace notar que los conjuntos \mathcal{C}_n y \mathcal{LC}_n son isomorfos. Así, efectuando una transformación logarítmica de los datos de la matriz de juicios de preferencias, el problema se puede plantear de la siguiente forma. Dada una matriz de comparación por pares $M = (m_{ij})$ $n \times n$, se trata de encontrar una mejor aproximación

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

log-consistente $L = (l_{ij})$ de la matriz $B = (b_{ij})$, con $b_{ij} = \log m_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, respecto de la norma $\|\cdot\|$:

$$(LPO)_{\|\cdot\|} \quad \|B - L^*\| = \min_{L \in \mathcal{L}^{\mathcal{C}} \mathcal{C}_n} \|B - L\| \quad (2.42)$$

Se hace notar que este enfoque equivale a considerar M como una perturbación multiplicativa de una matriz consistente W ideal:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= w_{ij} \cdot \delta_{ij}, \\ \log m_{ij} &= \log w_{ij} + \log \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

con δ_{ij} perturbación multiplicativa en el dato (i, j) , $i, j = 1, \dots, n$. En el enfoque de perturbación multiplicativa se considera la condición de normalización del vector de pesos $\prod_{i=1}^n w_i = 1$ ($\sum_{i=1}^n \log w_i = 0$) ([Bar98]).

Dada una matriz log-consistente L , por (2.41), existe $v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ tal que se puede escribir

$$L = e \cdot v - v^T e^T \quad (2.44)$$

donde $e = (1, 1, \dots, 1)^t$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Así, el problema (2.42) se puede reescribir, incluyendo la condición de normalización multiplicativa:

$$(LPO)_{\|\cdot\|} = \begin{cases} \min_{v \in \mathbb{R}^n} g(v) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \|B - L_v + (L_v)^t\| \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^n v_i = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Una vez obtenido el vector v , que resuelve el problema de minimización anterior, se deshace el cambio logarítmico y se normaliza

$$w_i = \frac{e^{v_i}}{\sum e^{v_i}} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.46)$$

para obtener el vector de pesos buscado $w = (w_i)^t$.

La formulaciones (2.42) y (2.45) establecen el problema en un marco general de aproximación log-consistente de imágenes (vía una transformación logarítmica) de matrices de comparación por pares para cualquier norma matricial. Esta formulación extiende métodos presentados en la literatura ([CK88], [Bry95], [Chu98], [KO99], [Bar98], [BCG92], [Lin07], [CW04], [Fül08]) siguiendo este enfoque. De esta forma se establece un contexto para la búsqueda de aproximaciones consistentes de matrices de comparación por pares para cualquier norma matricial, con el uso instrumental de la transformación logarítmica.

A continuación se explicitará la formulación del problema (2.45) para el caso de las normas matriciales usuales consideradas en la sección anterior.

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Si utilizamos la norma $\|\cdot\|_p$ considerada en (2.16), el problema (2.42) admite la expresión

$$\min_{\substack{w_{ij} \cdot w_{jk} = 1 \\ w_{ij} > 0 \\ i, j, k = 1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\log m_{ij} - \log w_{ij}|^p \quad \text{si } 1 \leq p < \infty. \quad (2.47)$$

En caso de considerar la norma vectorial l_∞ ,

$$\min_{\substack{w_{ij} \cdot w_{jk} = 1 \\ w_{ij} > 0 \\ i, j, k = 1, \dots, n}} \max |\log m_{ij} - \log w_{ij}|.$$

Los problemas anteriores, adoptando la expresión del problema (2.45), se pueden escribir como

$$\begin{aligned} (LPO)_p \quad \min (G(w))^p &= \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\log m_{ij} - \log w_i + \log w_j|^p \\ &= \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\log m_{ij} - v_i + v_j|^p \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \min (G(w)) &= \min \max |\log m_{ij} - \log w_i + \log w_j| \quad \text{si } p = \infty \\ \text{sujeto a} \quad &\sum_{i=1}^n v_i = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

En el caso de $p = 2$, método mínimos cuadrados logarítmico, la solución del problema (2.48) se puede obtener vía la media geométrica de los elementos de las filas:

$$\tilde{v}_i = \left(\prod_{j=1}^n \log m_{ij} \right)^{1/n} \quad i = 1, \dots, n.$$

El problema (2.48) se ha considerado para el caso particular $p = 1$ en [CK88], [Bry95] y para $p = 2$ en [Chu98], [KO99], [Bar98], [BCG92] y [Lin07]. En [CW04] se consideran $p = 1$, $p = 2$ y $p = \infty$.

Si trabajamos ahora con la norma matricial infinito, $\|\cdot\|_{m_\infty}$ definida en (2.23), el problema de optimización (2.45) tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} (LPO)_{m_\infty} \quad \min (G(w))^p &= \min \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |\log m_{ij} - v_i + v_j| \\ \text{sujeto a} \quad &\sum_{i=1}^n v_i = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

2.3.3. Algoritmos de cálculo

Una vez planteado el marco analítico de aproximación en las dos secciones previas, nos centramos ahora en el cálculo efectivo del vector de prioridad $w = (w_i)$ a partir de la matriz de comparación por pares $M = (m_{ij})$, siguiendo dichos enfoques. Nos centraremos en la resolución de los problemas de optimización planteados $(WPO)_p$, $(WPO)_{m\infty}$, $(LPO)_p$, $(LPO)_{m\infty}$ para las métricas más usuales $p = 1, 2, \infty$.

Comenzaremos con la métrica relativa a $p = 2$, correspondiente al uso de la norma matricial de Frobenious. Los problemas de optimización adoptan la expresión

$$\begin{aligned} (WPO)_2 \quad & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{ij}w_j - w_i)^2 \\ & \text{suje}to \text{ a} \\ & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} (LPO)_2 \quad & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\log m_{ij} - \log w_i + \log w_j)^2 \\ & \text{suje}to \text{ a} \\ & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & \prod_{i=1}^n w_i = 1 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Los problemas 2.50 y 2.51 son problemas de mínimos cuadrados, para los cuales existe gran cantidad de procedimientos numéricos de resolución ([SB02], [WPFV07]). En [KO97] se aborda la resolución del problema (2.51), construyendo primero una base ortogonal (mediante el método de Gram-Schmidt) del espacio de matrices log-consistentes y posteriormente se aplica el Teorema de la proyección ortogonal.

En ([FLR03]) se resuelve el problema de optimización $(PO)_2$ (2.19) mediante el algoritmo de Newton-Kantorovich. Se hace notar que en este caso, la función objetivo no es lineal, ni convexa.

Consideramos ahora las métricas $p = 1$ y $p = \infty$. En los problemas de optimización resultantes, las funciones objetivo se escriben en términos de los valores absolutos de las desviaciones correspondientes. Un procedimiento sistemático para traducir los problemas planteados en problemas de programación lineal consiste en introducir la parte positiva y negativa de los residuos considerados. Este procedimiento se detalla en ([Wat80]) en el contexto de resolución de sistemas lineales sobredeterminados y es clave en los modelos de Programacion por Metas (GP, por su denominación en inglés Goal Programming) en programación matemática ([Rom91], [Ign82], [CC77]).

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Consideramos en los problemas $(WPO)_1$, $(WPO)_\infty$ y $(WPO)_{m\infty}$ el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \frac{1}{2} \left[|w_i - w_j m_{ij}| + (w_i - w_j m_{ij}) \right] & i, j = 1, \dots, n \\ p_{ij} &= \frac{1}{2} \left[|w_i - w_j m_{ij}| - (w_i - w_j m_{ij}) \right] & i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Se hace notar que $n_{ij} \geq 0$, $p_{ij} \geq 0$, $n_{ij}p_{ij} = 0$ y

$$|w_i - w_j m_{ij}| = n_{ij} + p_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.53)$$

Reescribimos los problemas considerados $(WPO)_1$, $(WPO)_\infty$ y $(WPO)_{m\infty}$ en términos de estas nuevas variables, resultando las siguientes formulaciones GP de dichos problemas:

$$(GPWPO)_1 \quad \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij} + p_{ij}) \quad (2.54)$$

sujeito a

$$m_{ij}w_j - w_i + n_{ij} - p_{ij} = 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$n_{ij}, p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$(GPWPO)_\infty \quad \min D \quad (2.55)$$

sujeito a

$$n_{ij} + p_{ij} \leq D, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$m_{ij}w_j - w_i + n_{ij} - p_{ij} = 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$n_{ij}, p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$(GPWPO)_{m\infty} \quad \min D \quad (2.56)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n (n_{ij} + p_{ij}) \leq D, \quad i = 1, \dots, n$$

$$m_{ij}w_j - w_i + n_{ij} - p_{ij} = 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$n_{ij}, p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Las formulaciones anteriores responden a problemas de programación lineal que pueden ser resueltos aplicando el método simplex.

En los problemas $(LPO)_1$, $(LPO)_\infty$ y $(LPO)_{m\infty}$, los valores absolutos de los residuos o desviaciones puntuales, vienen dados por

$$\begin{aligned} |r_{ij}| &= |\log m_i - \log w_i + \log w_j| \\ &= |\alpha_{ij} - v_i + v_j| \end{aligned} \quad (2.57)$$

con $\alpha_{ij} = \log m_{ij}$ y $v_i = \log w_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Consideramos en este caso el cambio de variables:

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \frac{1}{2} \left[|\alpha_{ij} - v_i + v_j| + (\alpha_{ij} - v_i + v_j) \right] & i, j = 1, \dots, n \\ p_{ij} &= \frac{1}{2} \left[|\alpha_{ij} - v_i + v_j| - (\alpha_{ij} - v_i + v_j) \right] & i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.58)$$

Se hace notar que $n_{ij} \geq 0$, $p_{ij} \geq 0$, $n_{ij}p_{ij} = 0$ y

$$|\alpha_{ij} - v_i + v_j| = n_{ij} + p_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.59)$$

En términos de estas variables, los problemas $(LPO)_1$, $(LPO)_\infty$ y $(LPO)_{m\infty}$, pueden ser formulados, respectivamente, como los siguientes problemas de programación por metas:

$$(GPLPO)_1 \quad \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij} + p_{ij}) \quad (2.60)$$

sujeto a

$$\alpha_{ij} = v_i - v_j - n_{ij} + p_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$n_{ij}, p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$(GPLPO)_\infty \quad \min D \quad (2.61)$$

sujeto a

$$n_{ij} + p_{ij} \leq D, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\alpha_{ij} = v_i - v_j - n_{ij} + p_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$n_{ij}, p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$$(GPLPO)_{m\infty} \quad \min D \quad (2.62)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n (n_{ij} + p_{ij}) \leq D, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\alpha_{ij} = v_i - v_j - n_{ij} + p_{ij} \quad i = 1, \dots, n$$

$$n_{ij}, p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

2. MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

Los problemas de optimización anteriores son problemas de programación lineal que pueden ser resueltos utilizando el método simplex. Una vez obtenido el vector v , el vector $w = (w_i)^t$ de prioridad se calcula:

$$w_i = \frac{e^{v_i}}{\sum_{j=1}^n e^{v_j}} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.63)$$

Se hace notar que los métodos anteriores ofrecen gran flexibilidad frente al método del autovector principal. Por un lado, no requieren que la matriz de partida verifique la propiedad normativa de reciprocidad, ni que sean conocidos todos los elementos de la matriz. Estos requisitos sí se han de verificar si se adopta el método del autovector principal (Sección 2.3). Por otra parte, las soluciones a los problemas anteriormente planteados verifican la siguiente propiedad de simetría: Si w es solución del problema de minimización $\|M - (w_i/w_j)\|$, entonces w es solución del problema de minimización $\|M^T - (w_j/w_i)\|$, formulado en términos de la matriz traspuesta $(M - (w_i/w_j))^t$. La solución proporcionada por el método del autovector principal no verifica necesariamente esta propiedad ([Jen84]).

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE VECTORES DE PRIORIDAD A PARTIR DE UNA MATRIZ DE COMPARACIÓN POR PARES

3.1. *Introducción*

En el capítulo anterior (sección 2.3) se ha presentado una colección de métodos para la obtención de vectores de prioridad a partir de una PCM. Al respecto, algunas cuestiones importantes que se plantean son las siguientes:

- ¿Los vectores de prioridad obtenidos con los distintos métodos son coincidentes? En caso de no serlo, ¿distan poco entre sí?
- ¿La ordenación de preferencias (ranking) de las alternativas a partir de los vectores de pesos proporcionados por los distintos métodos, varía dependiendo del método? En caso que no coincidan, ¿hay un número pequeño de cambios de ranking?
- ¿Hay unanimidad sobre cual es la mejor alternativa?
- ¿Hay unanimidad sobre cual la peor alternativa?
- ¿Qué método es el mejor, cuál de las soluciones proporcionadas por los distintos métodos es la mejor?

Hay un largo debate en la literatura sobre el tema y no se puede dar ninguna respuesta general concluyente. Todos los métodos presentados proporcionan la misma solución, salvo errores de redondeo en el proceso de cálculo, si la matriz de comparación por pares de partida es consistente.

En problemas reales, debido a su complejidad, en general las matrices involucradas no son consistentes y diferentes métodos de priorización pueden proporcionar diferentes soluciones, atendiendo a distintos enfoques y estrategias. En este capítulo se trata de analizar el comportamiento de las soluciones ofrecidas por los principales métodos de priorización propuestos al aumentar la inconsistencia de las matrices involucradas, atendiendo a varios criterios.

Varios trabajos que se relacionan a continuación, abordan parcialmente este problema en la literatura. El estudio propuesto en [Fic86] es uno de los primeros

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

que plantean la necesidad de determinar una forma de comparar métodos de obtención del vector de prioridades en el marco de la teoría del AHP. Para esto los autores proporcionan una axiomática en la que se definen las siguientes propiedades, expresadas como condiciones que deben cumplir los métodos. En primer lugar, el método debe ser *exacto en el caso consistente*, esto es, cuando la matriz de entrada M es consistente, deben existir los valores positivos w_i ($i = 1, \dots, n$), tales que $m_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, $i, j = 1, \dots, n$. En segundo lugar, debe cumplirse la *no variabilidad del orden*, es decir, al permutarse las alternativas en evaluación, los órdenes correspondientes deben mantenerse respecto del orden original, para todos los métodos. La tercera propiedad es la *regularidad* o *smoothness*, que plantea que al haber variaciones pequeñas en la matriz de entrada, éstas no deben reflejarse como cambios importantes en los datos de salida del método. La cuarta propiedad (que el autor denomina *power invariance*) plantea que, dada la situación de tener la matriz de entrada M en una escala distinta a la escala en la que se desea el vector de prioridad w , el resultado obtenido al transformar de escala el vector de prioridad obtenido, sea el mismo que el resultado obtenido al aplicar el método sobre la matriz de entrada modificada a partir de la aplicación del cambio de escala a sus elementos. Los autores evalúan el cumplimiento de estas propiedades en el método del *Autovector* o *Autovector derecho*, en el método del *Autovector izquierdo*, en el método de los *Mínimos cuadrados* y en el método de los *Mínimos cuadrados logarítmicos*.

En [Kro87] se presenta un análisis comparativo incluyendo, además del método del *Autovector*, el método de los *Mínimos cuadrados*, el método de los *Mínimos cuadrados ponderados* y el método de los *Mínimos cuadrados logarítmicos*. Los métodos fueron comparados entre sí mediante un criterio basado en la distancia Euclídea. Las matrices de entrada utilizadas fueron 10 en cada dimensión n , con $n = 3, 5, 6$ y fueron 9 en el caso de matrices de dimensión 4×4 . Los resultados fueron agrupados de acuerdo al orden de la matriz y de acuerdo a tramos en los valores del índice de consistencia de Saaty.

En [GK93] se presenta un importante estudio comparativo que es la base de estudios posteriores. El estudio se lleva a cabo sobre el método del *Autovector* y una modificación de éste y varios métodos basados en distancias (*Mínimos cuadrados*, *Mínimos cuadrados ponderados*, *Mínimos cuadrados logarítmicos* y *Mínimos absolutos logarítmicos*).

La evaluación realizada en [GK93] considera básicamente cuatro criterios de medida (que son considerados en este trabajo), dadas por la variación en el sentido de la preferencia, el error cuadrático, la desviación de los resultados de un método respecto a la media de los resultados del resto y la robustez de los métodos ante perturbaciones en datos de la matriz de entrada. El análisis se realiza sobre un conjunto de matrices generadas aleatoriamente en términos de un parámetro de

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

perturbación.

El procedimiento es realizado para matrices de dimensión n , con $n = 5, 6, 7$ y los autores concluyen que la mayoría de los métodos evaluados (salvo el del *Autovector mejorado* que se comporta de manera poco efectiva en todos los criterios de evaluación) poseen ventajas y desventajas relativas respecto al resto, pero ninguno se impone completamente sobre el resto.

En [HK96] se presenta un estudio basado en una simulación Monte Carlo, en el que se evalúan los métodos de los *Mínimos cuadrados logarítmicos* y del *Autovector*. Considerando la dificultad de generar matrices recíprocas aleatorias con un índice de inconsistencia en un rango prescrito, implementa un procedimiento de generación de matrices a través de un parámetro de perturbación. Estas perturbaciones se aplican a los elementos de la parte triangular superior de la matriz. El experimento considera matrices de orden n , con $n = 4, \dots, 7$. Las medidas de error utilizadas se basan en la distancia Euclídea o l_2 y en la distancia Tchebychev o l_∞ . Los autores establecen finalmente, que el estudio no proporciona claridad con respecto a cuál de los métodos evaluados proporciona soluciones mejores o más precisas.

En [Chu98], se ilustra con un ejemplo la sensibilidad del método de los *Mínimos cuadrados logarítmicos*, al perturbar la matriz consistente de partida. En [SH98], los autores analizan comparativamente el método del *Autovector* y el método de los *Mínimos cuadrados logarítmicos*, a través de su aplicación a un conjunto de ejemplos. Al comparar los resultados, los autores son enfáticos en afirmar que el método del *autovector* es el único método válido cuando las matrices de entrada no son consistentes, basando su afirmación en que es el único método que captura la idea esencial de transitividad.

En [MS99] se presenta un interesante estudio que extiende el presentado en [GK93], incorporando el método de *Programación de preferencias fuzzy*, desarrollado por ellos en un trabajo previo y el método de *Programación por metas* propuesto por Bryson en [Bry95].

En [CT01] se evalúa la actuación de el método del *Autovector* y algunos métodos que se basan en modelos de optimización, a través de un ejemplo. En [CW04], se presenta una exhaustiva colección de métodos basados en distancias se estudia algunas de sus características, como la facilidad de resolución y las funciones de distancia utilizadas.

El análisis se realiza aplicando los métodos expuestos a una matriz consistente de entrada, de dimensiones 7×7 , generada a partir de un vector de prioridad conocido inicialmente. La evaluación de la eficacia de cada método se mide al calcular la desviación absoluta media del vector de prioridad obtenido al aplicar cada método a matrices perturbadas obtenidas al aplicar errores aleatorios con distribución normal a elementos de la PCM consistente de entrada. Los autores en [CW04] recomiendan finalmente la utilización del método de la *Media geométrica*

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

y un método de suma de columnas simple normalizado.

En [EvdD04] los autores proponen un método basado en el cálculo del *max-autovector* (en el contexto de una max-álgebra ([But03])) como alternativa al método del *Autovector* (basado en el teorema de Perron (2.2.1)) propuesto por Saaty. La actuación del método propuesto es comparada con el método del *Autovector* a partir de su aplicación a tres matrices de entrada.

En [JM04], se presenta un estudio en que se analizan métodos basados en distancias (con normas vectoriales l_1 , l_2 y l_∞), el método del *Autovector* y el método de *Transformación de filas*. La evaluación se realiza a partir de dos métricas cuantitativas: la máxima desviación y la desviación promedio, elemento a elemento, entre la matriz de entrada y la matriz consistente de ratios construida a partir del vector de prioridad obtenido con cada método. Estas métricas son calculadas a partir de las soluciones obtenidas al aplicar los métodos considerados a un conjunto de cinco matrices de entrada correspondientes a ejemplos planteados anteriormente en la literatura.

En [Lin06] se realiza un análisis comparativo de un método GP modificado para la obtención de una solución única, con el método del *Autovector* y con el método de los *Mínimos cuadrados logarítmicos*.

El estudio propuesto por el mismo autor en [Lin07], adopta el esquema de trabajo de [CW04], planteando que al incorporar nuevas simulaciones al estudio o al modificar el diseño de la simulación Monte Carlo, puede variar el ranking de métodos resultante del análisis.

El trabajo presentado en [IL06] utiliza una simulación Monte Carlo para comparar la actuación de cuatro métodos aplicados a matrices con entradas en la escala de Saaty como formato de expresión de preferencias. Los métodos evaluados son el método del *Autovector*, el método del *Autovector izquierdo*, el método de la *Media geométrica* y el método de la *media de valores normalizados*. Como parte del experimento, los autores diseñan un procedimiento de perturbación de las matrices que utiliza las opciones del conjunto discreto de valores de la escala de Saaty. El análisis comparativo se realiza en base a la cuantificación de variaciones en el ranking resultante, al aplicar los métodos en un conjunto de matrices de orden $n \times n$, con $n = 4, \dots, 7$.

En las próximas secciones de este capítulo se presenta un estudio comparativo de los principales métodos propuestos, atendiendo al grado de consistencia de las matrices de entrada. Este estudio extiende resultados previos en la literatura:

- Se considera una amplia colección de métodos de priorización.
- Se diseña un experimento numérico sobre muestras de gran tamaño de matrices de comparación por pares de Saaty, con una razón de consistencia en un rango prefijado, generadas aleatoriamente.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

- Se amplía el conjunto de medidas de análisis de las soluciones proporcionadas por los distintos métodos
- Los resultados de los experimentos se presentan gráficamente y mediante tablas que ayudan a su visualización

Un avance preliminar de los resultados de este estudio comparativo se presentó en la conferencia *23rd European Conference on Operational Research - EURO XXIII*, realizada en Bonn, Alemania, en 2009 ([DRTS09]).

3.2. Descripción de los experimentos. Generación aleatoria de matrices de comparación por pares

Se diseñó un experimento numérico a través del cual se analiza el comportamiento de un conjunto de métodos de priorización para muestras aleatorias de matrices de comparación por pares (afectadas por distintos grados de inconsistencia) atendiendo a un conjunto de medidas que se propondrán.

El objetivo de los experimentos es analizar el comportamiento de los métodos al aumentar el grado de inconsistencia de las matrices de entrada. Para esto, se genera aleatoriamente un conjunto de matrices aleatorias recíprocas de Saaty mediante un procedimiento que se describe más adelante. Las matrices son clasificadas mediante rangos de inconsistencia, considerando el *índice de consistencia relativo (CR)* definido por Saaty ([Saa80]).

Como paso siguiente, se calculan los vectores de prioridad resultantes de aplicar a las matrices de entrada los siguientes métodos de priorización:

- Método del *autovector* (por ser el de uso más extendido) (Sección 2.3).
- Métodos basados en aproximación de matrices, con enfoque sub-optimal, utilizando distancias vectoriales l_p con $p = 1, 2, \infty$, descritos en Ecs. 2.54, 2.50 y 2.55. Para efectos de simplicidad en la nomenclatura, en este capítulo se utilizará los identificadores genéricos de los métodos: WPO- l_1 , WPO- l_2 , WPO- l_∞ .
- Método basado en aproximación de matrices, con enfoque sub-optimal, utilizando distancia matricial m_∞ , descrito en Ec. 2.56. En este capítulo se identificará como WPO- m_∞ .
- Métodos basados en aproximación de matrices, con enfoque log-consistente, utilizando distancias vectoriales l_p con $p = 1, 2, \infty$, descritos en Ecs. 2.60, 2.51 y 2.61. Para efectos de simplicidad en la nomenclatura, en este capítulo se utilizará los identificadores genéricos de los métodos: LPO- l_1 , LPO- l_2 , LPO- l_∞ .

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

- Método basado en aproximación de matrices, con enfoque log-consistente, utilizando distancia matricial m_∞ , descrito en Ec. 2.62. En este capítulo se identificará como LPO- m_∞ .

Una vez aplicados los métodos, se realiza la interpretación de los resultados en el marco teórico general propuesto de aproximación matricial. En este entorno, se calcula para todos los casos un conjunto de medidas (se describen en la Sección 3.3), cuya interpretación aporta luz en la valoración de las soluciones dadas por los métodos aplicados, a partir de la visualización de los resultados.

Los experimentos se realizaron para matrices de entrada de orden 4×4 , 6×6 y 8×8 . En los tres casos, las etapas de cada experimento fueron:

- Generación y selección de matrices de entrada
- Aplicación de métodos de cálculo del vector de prioridad
- Cálculo de medidas de error y visualización de resultados

En la realización de los experimentos, se utilizó en general, como plataforma de software, Mathworks-MATLAB para el procesamiento matemático, Microsoft-Visual FoxPro (VFP) como sistema gestor de bases de datos y generador de modelos de optimización, ILOG-Cplex como optimizador lineal y cuadrático y Microsoft-Excel, para la visualización gráfica y tabular de los resultados. Para la generación de números aleatorios, se obtuvo datos desde [Haa], que proporciona números aleatorios de alta calidad, con aleatoriedad generada a partir de la captación de ruido atmosférico.

Un elemento de gran importancia en el diseño del experimento es el generador de matrices de comparación por pares aleatorias: modelar la inconsistencia inherente a los juicios humanos es un punto crítico. Tradicionalmente en los estudios comparativos en la literatura se han considerado perturbaciones (aditivas o multiplicativas) en uno o varios elementos de la matriz ([CW04], [CKZ97], [Chu98], [EvdD04], [Lin07]). En [HK96] se señala la dificultad de generar aleatoriamente matrices recíprocas con índices de inconsistencia fijados. Para solventar esta dificultad, en [HK96], [GK93] se introducen perturbaciones en los datos de la matriz mediante un parámetro que incide en la inconsistencia de la matriz el que "se espera" evolucione con el índice de inconsistencia de Saaty, aunque sin presentar resultados analíticos.

En nuestro enfoque se han generado matrices recíprocas, con razón de inconsistencia en un intervalo prefijado para matrices de dimensión $n \times n$, con $n = 4, 6, 8$. En cada caso se han generado 10 clases de matrices recíprocas, cuyos valores pertenecen a la escala de Saaty, agrupadas en rangos de valores del índice CR , con amplitud de rango 0,02, con lo que el conjunto de rangos a considerar es

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

$\{[0,00,0,02], [0,02,0,04], [0,04,0,06], \dots, [0,16,0,18], [0,18,0,20]\}$. De este modo, el experimento consideró matrices que de acuerdo a la clasificación de Saaty son consistentes ($CR < 0,1$) y matrices que no lo son ($0,1 \leq CR < 0,2$). Para cada uno de los experimentos, se consideró 2000 matrices (100 matrices en cada uno de los rangos de CR considerados).

Generación de muestras de PCM. Caso $n = 4$

En el caso del experimento con matrices de orden 4, el procedimiento consideró la generación extensiva de todas las posibles matrices recíprocas de entrada con elementos en la escala de Saaty. Dada la reciprocidad establecida como supuesto inicial, el procedimiento consistió en la generación de todos los posibles $n(n - 1)/2$ elementos de la triangular superior de la matriz, es decir, el equivalente a determinar todas las posibles 6-muestras del 9-conjunto $\{1/9, 1/7, 1/5, 1/3, 1, 3, 5, 7, 9\}$.

El algoritmo utilizado consistió en generar todos los valores posibles dentro de la escala de Saaty, para un arreglo unidimensional de 6 elementos, correspondientes a los elementos de la triangular superior de una matriz de dimensión 4×4 . Para esto, se asignó a cada posición del arreglo los valores enteros de 1 a 9, obteniendo las muestras $(1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 2), \dots, (9, 9, 9, 9, 9, 9)$. Para cada una de ellas, se estableció la equivalencia con los correspondientes elementos de la escala de Saaty, con lo que se construye el vector $[m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{23}, m_{24}, m_{34}]$, con $m_{ij} \in \{1/9, 1/7, 1/5, 1/3, 1, 3, 5, 7, 9\}$, $1 \leq i < j \leq 4$. La construcción de la matriz M se completa por reciprocidad. Esto es, $m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}$ con $1 \leq i < j \leq 4$ y $m_{ii} = 1$ con $i = 1, \dots, 4$.

De este modo, fueron generadas 531,441 matrices recíprocas de dimensión 4×4 mediante un programa en MATLAB en el que, además, se obtuvo el autovalor principal y se calculó el vector de prioridad para cada una mediante el método del *Autovector* (ver *toda_4x4.m* en Anexo A.1).

Como preparación de los datos para la aplicación de los métodos de cálculo del vector de prioridad, un programa desarrollado en VFP carga el archivo y genera las tablas de datos de entrada para el módulo de cálculo del vector y calcula para todas las matrices los correspondientes índices CR (ver *autovaloresn4.prg* en Anexo A.2).

Para el caso de las matrices 4×4 , la selección de las 100 matrices en cada rango CR se realiza en el módulo correspondiente a la aplicación de los métodos de cálculo del vector de prioridad.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Generación de muestras de PCM. Casos $n = 6$ y $n = 8$

En el caso de las matrices de dimension 6×6 y de dimensión 8×8 , no es recomendable replicar el procedimiento de generación utilizado para las matrices 4×4 , dado que los tiempos de cálculo se vuelven poco manejables y demasiado extensos. Por esta razón, en estos casos se optó por generar una matriz inicial M , de alta consistencia, con valores de la escala de Saaty extendida $\{1/9, 1/8, 1/7, \dots, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, \dots, 7, 8, 9\}$ y realizar sucesivas perturbaciones, de distinto tipo, en uno o más elementos de su triangular superior, manteniendo la condición de reciprocidad, hasta contar con 100 matrices en cada rango de índice CR establecido en el diseño de los experimentos.

La generación de la matriz inicial M se realizó mediante el siguiente procedimiento:

- Se generó aleatoriamente un vector de prioridad normalizado $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ con $n = 6, 8$.
- Se construyó la matriz consistente de ratios $W = (w_{ij})$ con $w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$.
- Se calculó la matriz $M = (m_{ij})$ en que m_{ij} es el valor más cercano a w_{ij} , con $m_{ij} \in \{1/9, 1/8, 1/7, \dots, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, \dots, 7, 8, 9\}$.

Se definió como condición para las perturbaciones que el valor resultante de la perturbación de un elemento de la matriz fuese siempre otro valor de la escala de Saaty extendida.

A partir de lo anterior, se consideraron los siguientes criterios para controlar el algoritmo de perturbación:

- Número de elementos de la triangular superior de la matriz a alterar.
- Magnitud y sentido de la perturbación, es decir, número de posiciones en la escala de Saaty extendida y orientación en que se realiza el "desplazamiento" del valor del elemento. Por ejemplo, si el valor original de un elemento m_{ij} es 3, una perturbación de (-5) corresponderá a disminuir la preferencia de i sobre j desplazándose 5 posiciones en la escala de Saaty extendida, lo que da como resultado $1/4$. En todos los casos, se limita la perturbación a que el valor resultante sea menor o igual al valor extremo superior de la escala (9) y mayor o igual al extremo inferior de la escala ($1/9$).
- Inversión de la preferencia, es decir, asignación, al elemento en perturbación, de un valor en el rango de preferencias recíprocas.
- Una vez efectuadas las perturbaciones, los elementos simétricos (respecto de la diagonal) se sustituyen por los valores recíprocos de los elementos perturbados para obtener, finalmente, una matriz recíproca.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

A partir de lo anterior, se diseñó un programa en VFP que, dada la matriz de baja inconsistencia inicial, generada de acuerdo al procedimiento descrito en el párrafo anterior y evaluada previamente en forma manual en MATLAB, que llamamos *matriz base*, aplica sucesivamente los criterios de perturbación definidos anteriormente, generando una colección de matrices recíprocas aleatorias que se almacenan en archivos de texto, uno por cada matriz generada (Ver *gen_mat_nn.trian.prg* en Anexo A.3).

La secuencia de perturbaciones realizada fue la siguiente:

- Perturbación $(+p)$ del elemento m_{ij} , en que $p = 1, \dots, 5$; $i = 1, \dots, n - 1$; $j = i + 1, \dots, n$.
- Perturbación $(-p)$ del elemento m_{ij} , en que $p = 1, \dots, 5$; $i = 1, \dots, n - 1$; $j = i + 1, \dots, n$.
- Perturbación $(+1)$ del elemento $m_{i_1 j_1}$, en que $i_1 = 1, \dots, n - 1$; $j_1 = i_1 + 1, \dots, n$ y perturbación $(+1)$ del elemento $m_{i_2 j_2}$, en que $i_2 = 1, \dots, n - 1$; $j_2 = i_2 + 1, \dots, n$, con $i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2$.
- Perturbación $(+1)$ del elemento $m_{i_1 j_1}$, en que $i_1 = 1, \dots, n - 1$; $j_1 = i_1 + 1, \dots, n$ y perturbación (-1) del elemento $m_{i_2 j_2}$, en que $i_2 = 1, \dots, n - 1$; $j_2 = i_2 + 1, \dots, n$, con $i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2$.
- Perturbación (-1) del elemento $m_{i_1 j_1}$, en que $i_1 = 1, \dots, n - 1$; $j_1 = i_1 + 1, \dots, n$ y perturbación (-1) del elemento $m_{i_2 j_2}$, en que $i_2 = 1, \dots, n - 1$; $j_2 = i_2 + 1, \dots, n$, con $i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2$.
- Perturbación del elemento m_{ij} (en la matriz base $m_{ij} \geq 1$), asignándole el valor $1/q$ en que $q = 2, \dots, 9$; $i = 1, \dots, n - 1$; $j = i + 1, \dots, n$.
- Perturbación de los elementos $m_{i_1 j_1}$ y $m_{i_2 j_2}$ (en la matriz base $m_{i_1 j_1}, m_{i_2 j_2} \geq 1$), con $i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2$ asignando a $m_{i_1 j_1}$ el valor $1/q_1$ y a $m_{i_2 j_2}$ el valor $1/q_2$, con $q_1, q_2 = 1, 3, 5, 7, 9$; $i_1 = 1, \dots, n - 1$; $j_1 = i_1 + 1, \dots, n$ y con $i_2 = 1, \dots, n - 1$; $j_2 = i_2 + 1, \dots, n$.
- Perturbación combinada de los elementos $m_{i_1 j_1}$ y $m_{i_2 j_2}$ (en la matriz base $m_{i_1 j_1}, m_{i_2 j_2} \geq 1$), con $i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2$ asignando a $m_{i_1 j_1}$ el valor $1/q_1$ y aplicando una perturbación $(+p)$ al elemento $m_{i_2 j_2}$ con $p = 1, \dots, 4$; $q_1 = 1, 3, 5, 7, 9$; $i_1 = 1, \dots, n - 1$; $j_1 = i_1 + 1, \dots, n$ y con $i_2 = 1, \dots, n - 1$; $j_2 = i_2 + 1, \dots, n$.
- Perturbación $(+p)$ del elemento $m_{i_1 j_1}$, $i_1 = 1, \dots, n - 1$; $j_1 = i_1 + 1, \dots, n$ y perturbación $(+p)$ del elemento $m_{i_2 j_2}$, en que $i_2 = 1, \dots, n - 1$; $j_2 = i_2 + 1, \dots, n$, con $i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2$; $p = 2, \dots, 5$.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

- Perturbación $(+p)$ del elemento $m_{i_1 j_1}$, $i_1 = 1, \dots, n-1$; $j_1 = i_1 + 1, \dots, n$ y perturbación $(+(6-p))$ del elemento $m_{i_2 j_2}$, en que $i_2 = 1, \dots, n-1$; $j_2 = i_2 + 1, \dots, n$, con $i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2$; $p = 1, \dots, 5$.

El procedimiento generó un conjunto de 4770 matrices recíprocas de dimensión 6×6 y 16030 matrices recíprocas de dimensión 8×8 . En cada caso, se seleccionaron aleatoriamente 100 matrices en cada uno de los rangos del índice *RC* definidos, para ser consideradas en los experimentos.

Para el cálculo del máximo autovalor de cada matriz, el autovector principal y el vector de prioridad normalizado, correspondiente a la resolución con el método *Autovector* se implementó un programa MATLAB (ver *av_n6.m* en Anexo A.4) que lee los archivos de texto con las matrices, calcula los índices y el vector de prioridad y guarda los resultados en un archivo de texto (*autovalores_n6.txt*).

Al igual que en el caso de las matrices de dimensión 4×4 , como preparación de los datos para la aplicación de los métodos de priorización, un programa desarrollado en VFP carga el archivo *autovalores_n6.txt* y genera las tablas de datos de entrada para la etapa de cálculo del vector, calculando para todas las matrices los índices *CR* (ver *autovalores_n6.prg* en Anexo A.5).

En la segunda etapa de los experimentos, se aplica los métodos de cálculo del vector de prioridad en evaluación a todas las PCM aleatorias generadas en la etapa anterior. Los tres pasos de esta etapa se representan en la Figura 3.1. Se desarrolló un programa en VFP que lee los archivos correspondientes a las

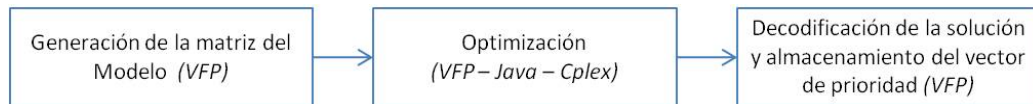


Fig. 3.1: Pasos en la aplicación de los métodos de cálculo del vector de prioridad

matrices aleatorias generadas en la etapa anterior y genera en cada caso la matriz de coeficientes.

Los algoritmos de generación utilizan un enfoque de cálculo y almacenamiento de los coeficientes del problema, recorriendo la matriz de coeficientes por columnas y almacenando los elementos distintos de cero, con los identificadores de fila (restricción) y columna (variable) que corresponda.

En esta etapa se generan las formulaciones de los modelos para los métodos sub-optimales y log-consistentes, ya que el método del *Autovector* es resuelto directamente en la etapa inicial, tal como se describió anteriormente. En el segundo paso de esta segunda etapa, el programa VFP realiza un llamado a rutinas de optimización lineal y cuadrática, según corresponda, de la biblioteca de funciones de

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

IBM-ILOG Cplex en formato de clases Java. De este modo, la solución de cada problema es almacenada en tablas de datos intermedias, con codificaciones correspondientes al identificador de la matriz, el identificador del método utilizado y los valores de las variables asociadas al vector de prioridad.

Como paso final de esta etapa, el programa genera tablas de datos que agrupan la información de las matrices aleatorias de entrada con las soluciones obtenidas mediante la aplicación de todos los métodos considerados. Estas tablas son la base para el cálculo de las medidas de error que se realiza en la etapa siguiente.

3.3. Descripción de los experimentos. Medidas de error y análisis

A partir de los vectores de prioridad obtenidos al aplicar los métodos de priorización a las matrices de entrada, se trata de analizar las soluciones y evaluar la actuación de los distintos métodos atendiendo a un conjunto de medidas de error y análisis. La mayoría de los métodos que se consideran tienen como objetivo estimar cómo de fielmente un vector de prioridad $w = (w_i)^t$, obtenido a partir de un método de priorización, releja la información de la matriz de partida $M = (m_{ij})$. Para ello, en la mayoría de los casos, se construye la matriz consistente $W = (w_i/w_j)$ y se estiman los residuos relativos $|m_{ij} - \frac{w_i(t)}{w_j(t)}|$.

En general, las medidas de error hacen posible visualizar la correspondencia del vector de prioridad con los datos de entrada, mediante la comparación de esos datos con la matriz de ratios. Las medidas de error calculadas para las soluciones obtenidas en los experimentos fueron las siguientes:

- Desviación máxima (*DVMAX*): Expresa la máxima desviación relativa de los elementos de la PCM de entrada respecto a la matriz W :

$$DVMAX = \max_{i,j=1\dots n} \frac{|m_{ij} - \frac{w_i(t)}{w_j(t)}|}{|m_{ij}|} \quad (3.1)$$

- Desviación media absoluta (*MAD*): Mide la media de la desviación relativa de los elementos de la PCM de entrada respecto a la matriz W :

$$MAD = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{|m_{ij} - \frac{w_i(t)}{w_j(t)}|}{|m_{ij}|} \right) \quad (3.2)$$

- Error medio cuadrático (*RMSE*): Es la media de los errores cuadráticos de las desviaciones relativas de los elementos de la PCM de entrada respecto a

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

la matriz W :

$$RMS E = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{m_{ij} - \frac{w_i(t)}{w_j(t)}}{|m_{ij}|} \right|^2 \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

- Suma de desviaciones booleanas ($MMBD$): es la suma de los cambios en las preferencias, medidos como desviaciones booleanas. Es decir los casos en que la alternativa i es preferida a la alternativa j en la matriz de entrada, pero i recibe un peso w_i menor que el peso w_j de j :

$$MMBD = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I_{ij} \quad t = 1, \dots, 9; \quad I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } w_i > w_j \text{ y } m_{ij} < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.4)$$

- Desviación Media (MD): Es la media de las sumas de las desviaciones de los elementos del vector de prioridad ($w(t)$) obtenido al aplicar un método específico (t), respecto de la media de los valores obtenidos por todos los métodos para el mismo elemento:

$$MD_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |w_i(t) - \overline{w_i}| \quad t = 1, \dots, 9; \quad \overline{w_i} = \frac{1}{9} \sum_{t=1}^9 w_j(t) \quad (3.5)$$

En el experimento se han aplicado nueve métodos $t = 1, \dots, 9$.

Las medidas de error fueron calculadas para todas las matrices de entrada con respecto a las soluciones obtenidas en cada método, mediante un programa desarrollado en VFP. Todas las medidas calculadas son almacenadas en una tabla de la base de datos, en un formato que permite la generación de informes y tablas para una mejor visualización de los resultados, utilizando Microsoft - Excel. Los resultados de los experimentos se presentan en las próximas secciones de este capítulo.

3.4. Resultados del experimento 1. Evaluación de métodos de priorización en función de la inconsistencia. Caso $n = 4$

En esta sección se describen y analizan los resultados obtenidos del experimento diseñado para PCM de dimensión 4. Se presentan los datos correspondientes a cada uno de los criterios de medida (introducidos en la Sección 3.3), mediante tablas y gráficos comparativos de los distintos métodos para ayudar a su visualización. Los resultados fueron agrupados según rangos de valores de amplitud 0,02 para el parámetro (CR). Así, en cada caso, se calculó la media aritmética

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-l1	LPO-l2	LPO-li	LPO-mi	WPO-l1	WPO-l2	WPO-li	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.248	0.524	0.251	0.178	0.426	0.569	0.364	0.300	0.401
[0.02 - 0.04]	0.423	0.781	0.428	0.336	0.717	1.079	0.771	0.643	0.876
[0.04 - 0.06]	0.601	1.300	0.619	0.448	1.112	1.609	1.009	0.841	1.149
[0.06 - 0.08]	0.723	1.477	0.748	0.542	1.384	1.984	1.321	1.084	1.546
[0.08 - 0.10]	0.833	1.699	0.868	0.665	1.599	2.250	1.498	1.255	1.787
[0.10 - 0.12]	0.913	1.997	0.958	0.725	1.861	2.688	1.864	1.559	2.264
[0.12 - 0.14]	1.048	2.389	1.106	0.782	2.231	3.392	2.016	1.623	2.568
[0.14 - 0.16]	1.127	2.606	1.201	0.873	2.461	3.566	2.232	1.902	3.195
[0.16 - 0.18]	1.228	2.822	1.333	0.955	2.684	3.891	2.424	1.990	3.226
[0.18 - 0.20]	1.329	3.492	1.449	1.014	3.179	4.538	2.446	2.106	3.883

Fig. 3.2: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Máxima" (DVMAX)

de la medida correspondiente, para todas las PCM de la muestra cuyo CR estaba en el mismo rango de CR . A partir de estos datos medios para cada rango de CR se ha construido una tabla con los datos representados atendiendo a una escala de colores y se han obtenido la recta a trazos de interpolación y la recta de regresión lineal que ajusta dichos datos.

Se hace notar que en todas las medidas consideradas, los datos obtenidos para los distintos métodos difieren poco si la razón de consistencia es pequeña. Las diferencias se incrementan al aumentar la razón de consistencia.

3.4.1. Desviación Máxima (DVMAX), caso $n = 4$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida $DVMAX$ (Ec. 3.1) a los métodos de priorización para las PCM de dimensión 4, se presentan en la Figura 3.2. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.3 y 3.4 respectivamente.

Al analizar los datos y gráficas, se observa que, considerando esta medida de error, el método que tiene un mejor comportamiento a medida que aumenta la inconsistencia de las matrices es el método log-consistente con norma vectorial infinito ($LPO-l_\infty$), lo que es lógico atendiendo a que la medida $DVMAX$ corresponde a la desviación máxima. Del mismo modo, ofrecen buenos resultados los métodos $LPO-l_2$ y del *Autovector*. En estos tres casos, el comportamiento es prácticamente lineal. Por otra parte, los métodos que presentan una mayor magnitud para esta medida del error, son aquellos que utilizan distancias vectoriales l_1 y matriciales m_∞ . Como era de esperar, de la familia de métodos sub-optimales, el método $WPO-l_\infty$ es el que proporciona mejores resultados. En estos dos casos, la familia de los métodos sub-optimales presenta mayores magnitudes de error que los

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

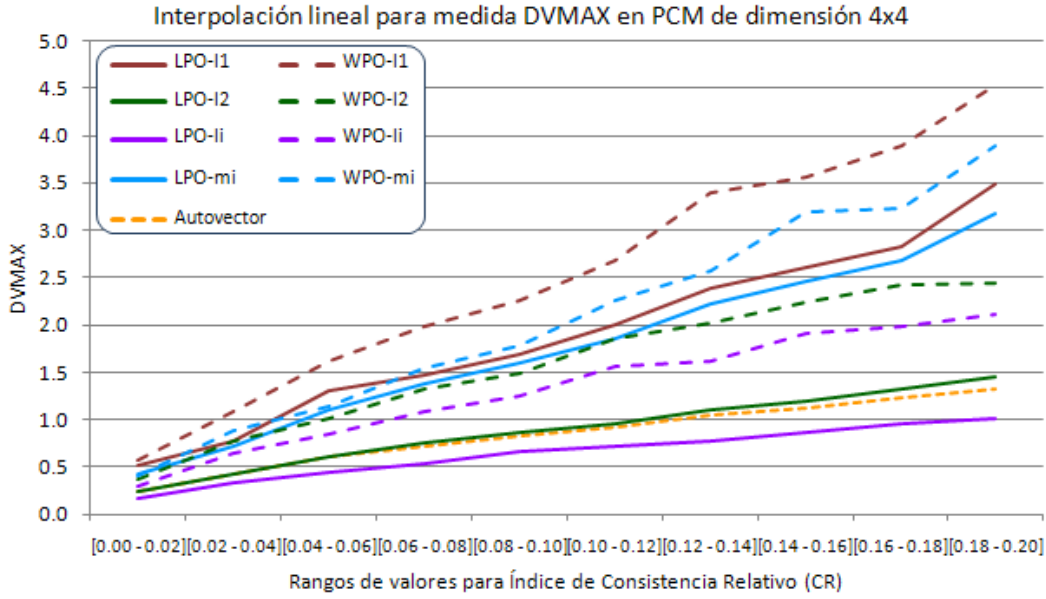


Fig. 3.3: Interpolación lineal para medida DVMAX con PCM de dimensión 4x4

métodos log-consistentes.

3.4.2. Desviación Media Absoluta (MAD), caso $n = 4$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida MAD (3.2) a los vectores de prioridad resultantes de la aplicación de los distintos métodos a evaluar, a las clases de PCM de dimensión 4, se presentan en la Figura 3.5. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.6 y 3.7 respectivamente.

Al analizar los datos y gráficas correspondientes a la medida de error MAD , se observa que los métodos log-consistentes tienen, en general, un mejor comportamiento que los métodos sub-optimales. En particular, los métodos $LPO-l_1$ y $LPO-l_2$ son los que presentan menores magnitudes de error. Las rectas de tendencias lineales para los métodos sub-optimales presentan, además, pendientes mayores a las de los métodos log-consistentes, por lo que el error tiende a aumentar en mayor proporción, a medida que aumenta la inconsistencia de las matrices de entrada. El método $LPO-l_1$ es el que ofrece mejores resultados, como era de esperar atendiendo a la métrica en la que se basa dicho método.

3.4.3. Error Medio Cuadrático ($RMSE$), caso $n = 4$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida $RMSE$ (3.3) a los resultados de los métodos de priorización para PCM de dimensión 4, se presentan en

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

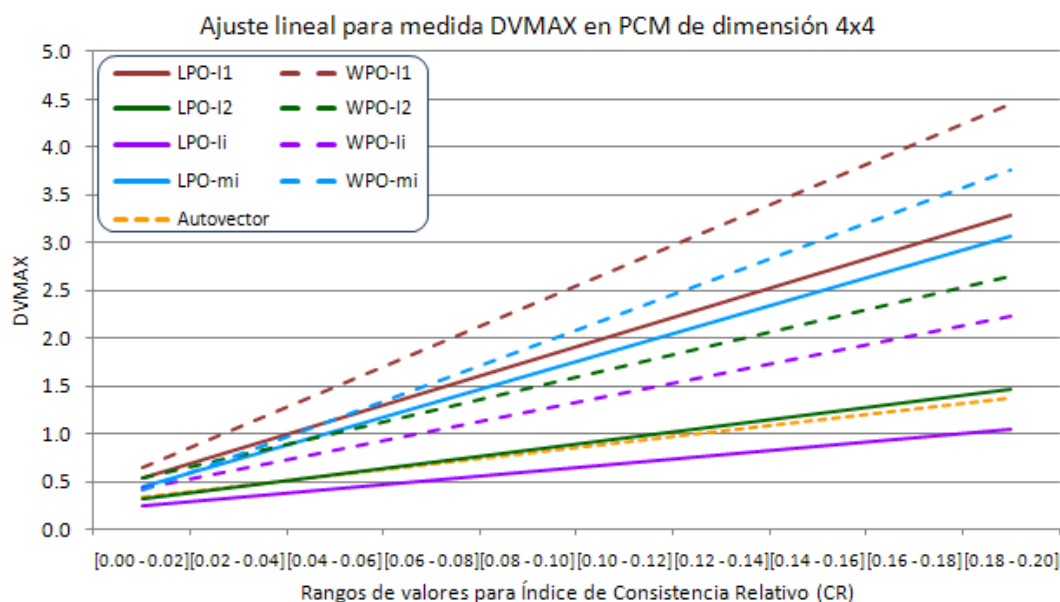


Fig. 3.4: Regresión lineal para medida DVMAX con PCM de dimensión 4x4

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.155	0.116	0.155	0.171	0.150	0.153	0.166	0.180	0.163
[0.02 - 0.04]	0.265	0.218	0.263	0.283	0.254	0.310	0.296	0.327	0.315
[0.04 - 0.06]	0.353	0.285	0.348	0.383	0.339	0.368	0.377	0.405	0.404
[0.06 - 0.08]	0.427	0.367	0.423	0.469	0.404	0.508	0.501	0.518	0.542
[0.08 - 0.10]	0.482	0.420	0.473	0.510	0.468	0.541	0.549	0.583	0.606
[0.10 - 0.12]	0.536	0.490	0.529	0.568	0.552	0.668	0.645	0.652	0.712
[0.12 - 0.14]	0.588	0.529	0.573	0.638	0.596	0.754	0.700	0.739	0.816
[0.14 - 0.16]	0.634	0.579	0.621	0.694	0.630	0.771	0.749	0.770	0.897
[0.16 - 0.18]	0.679	0.619	0.657	0.720	0.687	0.840	0.798	0.834	0.950
[0.18 - 0.20]	0.731	0.697	0.710	0.776	0.782	0.973	0.868	0.879	1.114

Fig. 3.5: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Media Absoluta" (MAD)

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

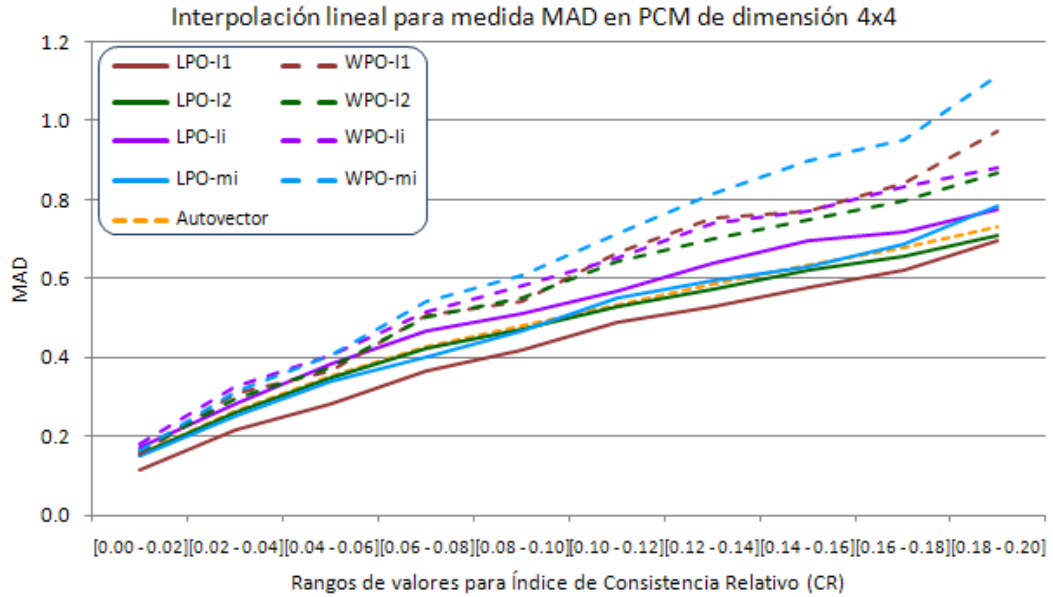


Fig. 3.6: Interpolación lineal para medida MAD con PCM de dimensión 4x4

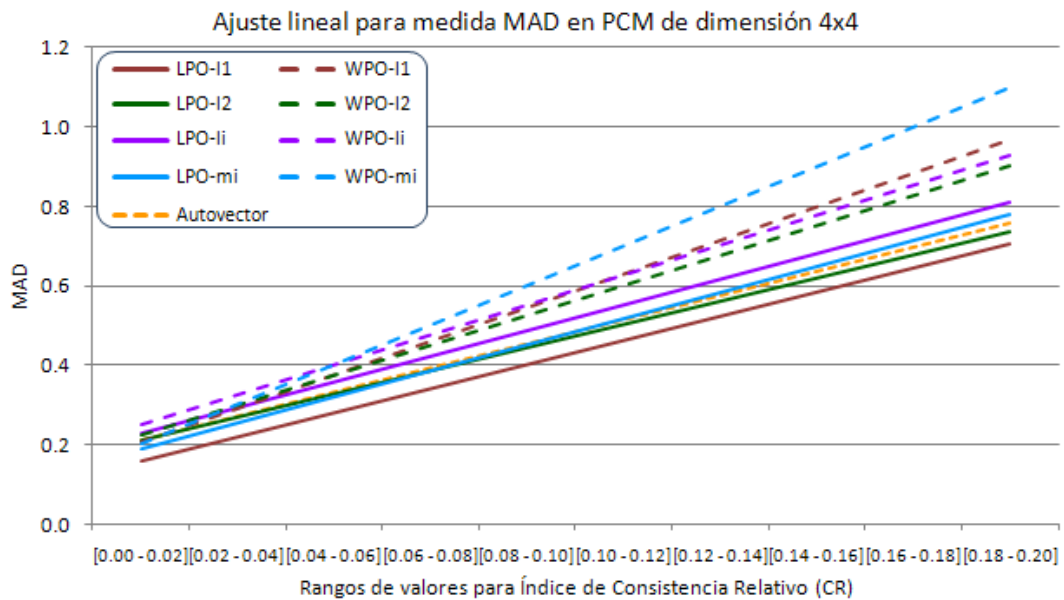


Fig. 3.7: Regresión lineal para medida MAD con PCM de dimensión 4x4

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-l1	LPO-l2	LPO-li	LPO-mi	WPO-l1	WPO-l2	WPO-li	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.052	0.074	0.052	0.055	0.072	0.087	0.065	0.062	0.073
[0.02 - 0.04]	0.090	0.117	0.090	0.094	0.114	0.160	0.120	0.114	0.138
[0.04 - 0.06]	0.119	0.173	0.119	0.125	0.163	0.216	0.156	0.146	0.180
[0.06 - 0.08]	0.143	0.202	0.143	0.149	0.198	0.274	0.205	0.187	0.240
[0.08 - 0.10]	0.166	0.231	0.166	0.172	0.226	0.300	0.226	0.210	0.268
[0.10 - 0.12]	0.184	0.274	0.184	0.190	0.268	0.371	0.274	0.246	0.330
[0.12 - 0.14]	0.202	0.303	0.202	0.209	0.304	0.436	0.296	0.271	0.379
[0.14 - 0.16]	0.218	0.339	0.218	0.228	0.327	0.460	0.322	0.296	0.440
[0.16 - 0.18]	0.235	0.360	0.235	0.240	0.357	0.496	0.348	0.314	0.456
[0.18 - 0.20]	0.253	0.438	0.253	0.259	0.420	0.592	0.366	0.336	0.552

Fig. 3.8: Datos obtenidos para la medida de error "Error Medio Cuadrático" (RMSE)

la Figura 3.8. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.9 y 3.10 respectivamente.

Al analizar comparativamente los métodos en función del error medio cuadrático, se observa que tres de ellos se comportan de manera similar (y mejor que los métodos restantes), con una tendencia de aumento prácticamente lineal: los métodos log-consistentes con normas vectoriales l_2 y l_∞ (LPO- l_2 y LPO- l_∞) y el método del *Autovector*. Por otra parte, los métodos que presentan una mayor magnitud para esta medida del error, son los sub-optimales que utilizan distancias vectoriales l_1 y matriciales m_∞ (WPO- l_1 y WPO- m_∞). El método que ofrece mejores resultados es LPO- l_2 , lo que parece lógico atendiendo a la métrica en la que se basa dicho método.

3.4.4. Desviación Booleana (MMBD), caso $n = 4$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida *MMBD* (3.4) a los métodos de priorización para las PCM de dimensión 4, se presentan en la Figura 3.11. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.12 y 3.13 respectivamente.

El análisis de la desviación booleana, proporciona un nuevo indicador de robustez de los métodos log-consistentes con normas vectoriales l_2 y l_∞ (LPO- l_2 y LPO- l_∞) y del método del autovector, cuyas gráficas se superponen. Por otra parte, los métodos que presentan un mayor número de cambio de preferencias ordinales son los métodos sub-optimales con norma matricial m_∞ y con normas vectoriales l_1 y l_2 (WPO- m_∞ , WPO- l_1 y WPO- l_2).

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

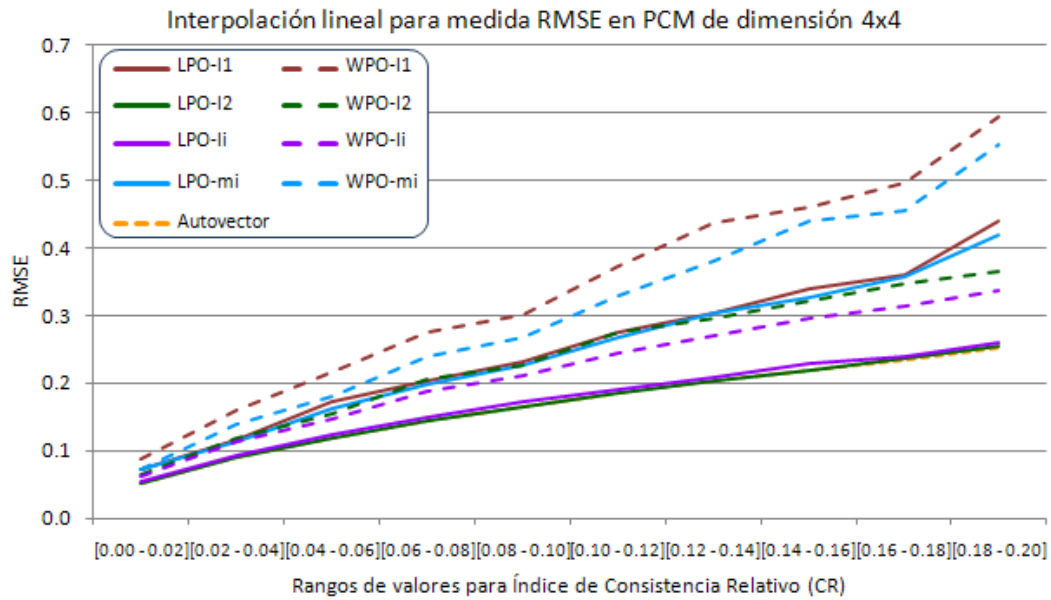


Fig. 3.9: Interpolación lineal para medida RMSE con PCM de dimensión 4x4

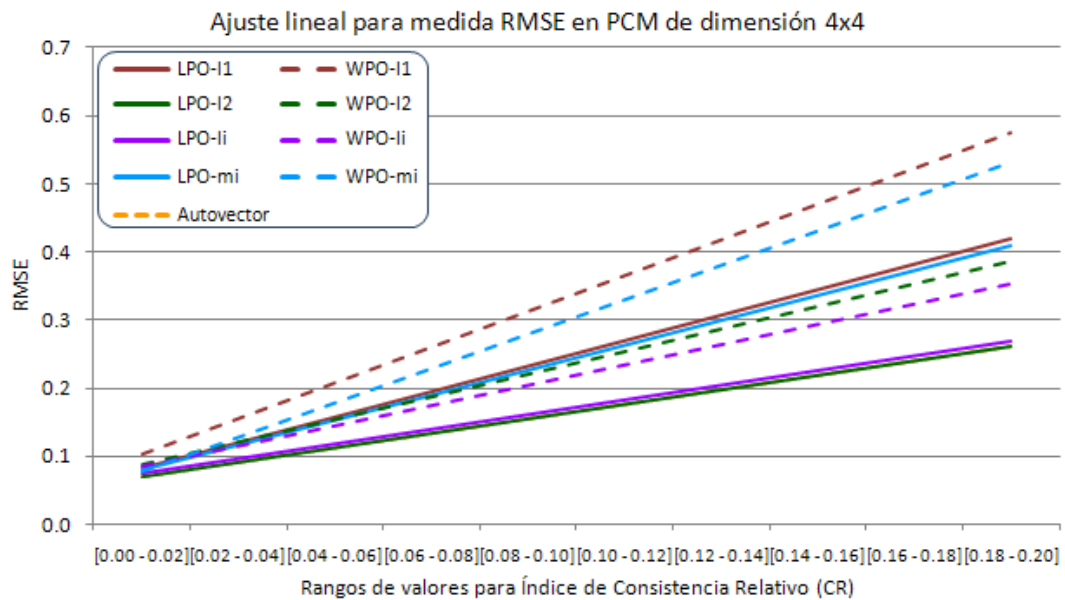


Fig. 3.10: Regresión lineal para medida RMSE con PCM de dimensión 4x4

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
[0.02 - 0.04]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
[0.04 - 0.06]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.020
[0.06 - 0.08]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.130	0.080	0.000	0.010
[0.08 - 0.10]	0.000	0.010	0.000	0.000	0.010	0.030	0.040	0.000	0.030
[0.10 - 0.12]	0.000	0.010	0.000	0.000	0.010	0.140	0.160	0.010	0.220
[0.12 - 0.14]	0.000	0.010	0.000	0.000	0.010	0.130	0.080	0.000	0.100
[0.14 - 0.16]	0.000	0.040	0.000	0.000	0.030	0.120	0.140	0.080	0.210
[0.16 - 0.18]	0.000	0.030	0.000	0.000	0.050	0.160	0.120	0.080	0.190
[0.18 - 0.20]	0.000	0.090	0.000	0.000	0.120	0.230	0.200	0.150	0.320

Fig. 3.11: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Booleana" (MMBD)

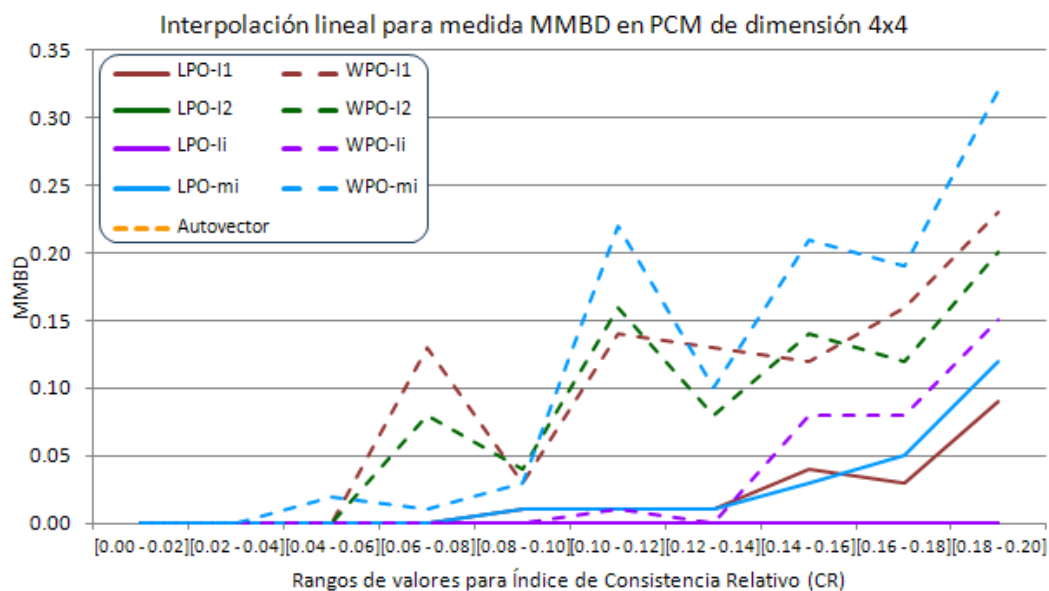


Fig. 3.12: Interpolación lineal para medida MMBD con PCM de dimensión 4x4

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

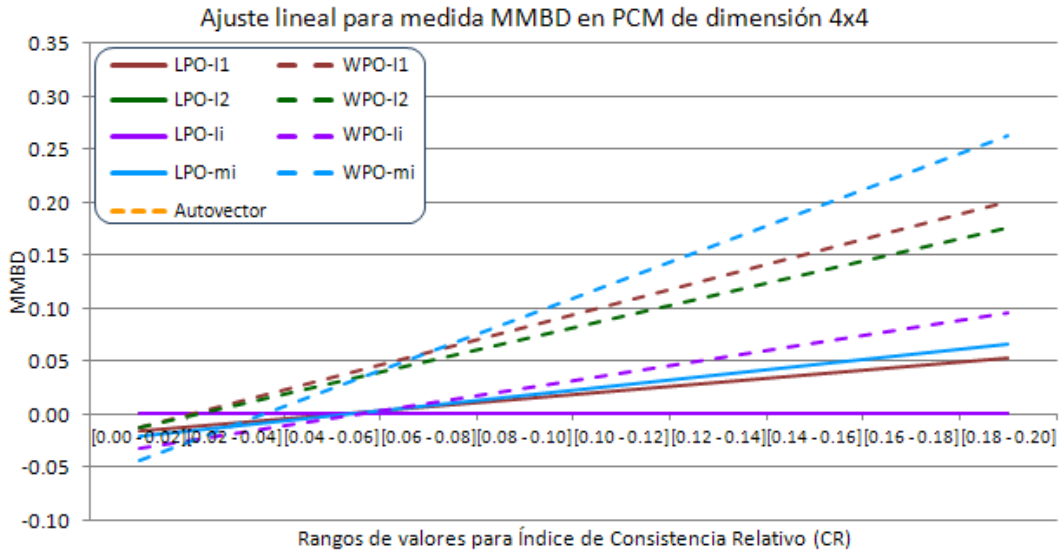


Fig. 3.13: Regresión lineal para medida MMBD con PCM de dimensión 4x4

3.4.5. Desviación Media (MD), caso $n = 4$

En este punto se va a analizar el comportamiento de cada uno de los métodos de priorización con respecto a las soluciones promedio de los métodos considerados para las matrices recíprocas de dimensión 4 generadas.

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida MD (3.5) a los métodos priorización para las PCM de dimensión 4, se presentan en la Figura 3.14. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.15 y 3.16 respectivamente.

Al analizar el comportamiento de cada método respecto de la media de todos los métodos, se observa que el método $LPO-l_2$ mantiene una desviación media menor al resto de los métodos, lo que hace que destaque. En las gráficas presentadas se pueden apreciar grupos de métodos con un comportamiento similar. El método del *Autovector* y el método $WPO-l_2$ mantienen magnitudes del error cercanas a las de $LPO-l_2$. Por otra parte, los métodos que utilizan la norma vectorial l_1 ($WPO-l_1$ y $LPO-l_1$) y la norma matricial m_∞ ($WPO-m_\infty$ y $LPO-m_\infty$) son los que presentan mayor magnitud de la desviación y - además - mayor variabilidad a medida que aumenta la inconsistencia de las matrices.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.019	0.042	0.019	0.033	0.039	0.042	0.014	0.029	0.037
[0.02 - 0.04]	0.032	0.064	0.031	0.045	0.064	0.068	0.029	0.042	0.067
[0.04 - 0.06]	0.041	0.078	0.038	0.066	0.075	0.082	0.035	0.050	0.076
[0.06 - 0.08]	0.049	0.103	0.044	0.072	0.102	0.102	0.053	0.058	0.103
[0.08 - 0.10]	0.055	0.100	0.049	0.077	0.098	0.107	0.055	0.065	0.101
[0.10 - 0.12]	0.059	0.129	0.054	0.080	0.133	0.128	0.067	0.063	0.121
[0.12 - 0.14]	0.067	0.134	0.062	0.090	0.142	0.137	0.078	0.080	0.136
[0.14 - 0.16]	0.072	0.138	0.065	0.108	0.128	0.141	0.074	0.076	0.138
[0.16 - 0.18]	0.072	0.134	0.064	0.095	0.136	0.137	0.079	0.080	0.136
[0.18 - 0.20]	0.081	0.188	0.072	0.102	0.183	0.177	0.096	0.089	0.169

Fig. 3.14: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Media" (MD)

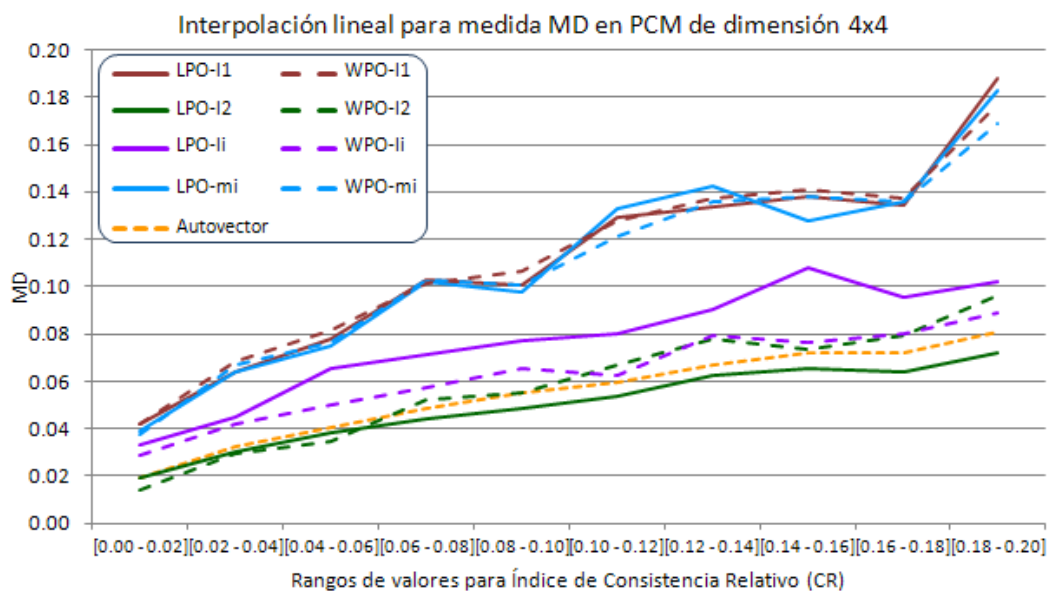


Fig. 3.15: Interpolación lineal para medida MD con PCM de dimensión 4x4

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

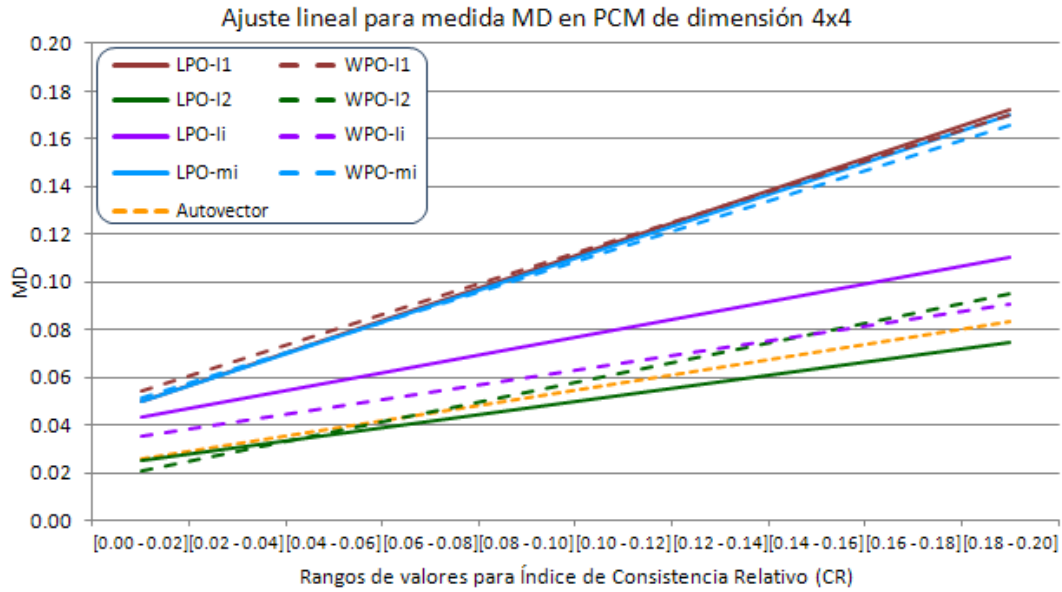


Fig. 3.16: Regresión lineal para medida MD con PCM de dimensión 4x4

3.5. Resultados del experimento 2. Evaluación de métodos de priorización en función de la inconsistencia. Caso $n = 6$

En esta sección se describen y analizan los resultados obtenidos del experimento diseñado para PCM de dimensión 6. Se presentan los datos correspondientes a cada uno de los criterios de medida (introducidos en la Sección 3.3), mediante tablas y gráficos comparativos de los distintos métodos para ayudar a su visualización. Los resultados fueron agrupados según rangos de valores de amplitud 0,02 para el parámetro (CR). Así, en cada caso, se calculó la media aritmética de la medida correspondiente, para todas las PCM de la muestra cuyo CR estaba en el mismo rango de CR. A partir de estos datos medios para cada rango de CR se ha construido una tabla con los datos representados atendiendo a una escala de colores y se han obtenido la recta a trazos de interpolación y la recta de regresión lineal que ajusta dichos datos.

Se hace notar que en todas las medidas consideradas, los datos obtenidos para los distintos métodos difieren poco si la razón de consistencia es pequeña. Las diferencias se incrementan al aumentar la razón de consistencia.

A continuación se describen los resultados obtenidos al aplicar los métodos del experimento a matrices de comparación por pares de entrada, de dimensión 6×6 .

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO- l_1	LPO- l_2	LPO- l_i	LPO- m_i	WPO- l_1	WPO- l_2	WPO- l_i	WPO- m_i
[0.00 - 0.02]	0.432	1.046	0.442	0.336	0.870	1.128	0.881	0.530	0.754
[0.02 - 0.04]	0.696	1.552	0.711	0.481	1.261	1.740	1.215	0.851	1.082
[0.04 - 0.06]	1.221	2.353	1.300	0.705	2.145	2.430	1.801	1.582	2.142
[0.06 - 0.08]	1.662	3.817	1.875	0.930	3.459	3.633	2.118	1.561	2.250
[0.08 - 0.10]	1.931	4.368	2.268	1.045	4.067	5.858	2.490	1.872	3.115
[0.10 - 0.12]	2.268	5.952	2.776	1.190	5.534	6.637	3.170	2.535	3.970
[0.12 - 0.14]	2.569	7.065	3.314	1.353	6.600	9.803	3.463	2.837	4.991
[0.14 - 0.16]	2.813	7.374	3.701	1.545	6.869	11.241	3.454	3.045	5.437
[0.16 - 0.18]	3.055	8.319	4.216	1.726	7.771	10.097	5.935	3.900	7.947
[0.18 - 0.20]	3.343	11.395	4.876	1.870	9.365	14.817	5.064	3.587	6.074

Fig. 3.17: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Máxima" (DVMAX)

3.5.1. Desviación Máxima (DVMAX), caso $n = 6$

Los datos obtenidos al aplicar la medida *DVMAX* a los métodos de cálculo del vector de prioridad para las PCM de dimensión 6×6 , se presentan en la Figura 3.17. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.18 y 3.19 respectivamente.

Al igual que en el caso de las matrices de dimensión 4×4 , se observa que, considerando esta medida de error, el método que tiene un mejor comportamiento a medida que aumenta la inconsistencia de las matrices es el método log-consistente con norma vectorial infinito (LPO- l_i), lo que es lógico atendiendo a que la medida *DVMAX* corresponde a la desviación máxima. Del mismo modo, en este caso presentan magnitudes del error comparativamente bajas respecto al resto, los métodos del *Autovector* y WPO- l_∞ . Por otra parte, los métodos que presentan una mayor magnitud para esta medida del error, son aquellos que utilizan distancias vectoriales l_1 y matriciales m_∞ , en particular los métodos WPO- l_1 y LPO- l_1 .

3.5.2. Desviación Media Absoluta (MAD), caso $n = 6$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida *MAD* (3.2) a los métodos de priorización para las PCM de dimensión 6, se presentan en la Figura 3.20. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.21 y 3.22 respectivamente.

Al analizar los datos y gráficas correspondientes a la medida de error *MAD* para la aplicación de los métodos sobre matrices de dimensión 6×6 , se observa que los métodos log-consistentes tienen, en general, un mejor comportamiento que los métodos sub-optimales. En particular, los métodos LPO- l_1 , LPO- l_2 y LPO- m_∞ , son los que presentan menor magnitud del error. Del mismo modo, el método del

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

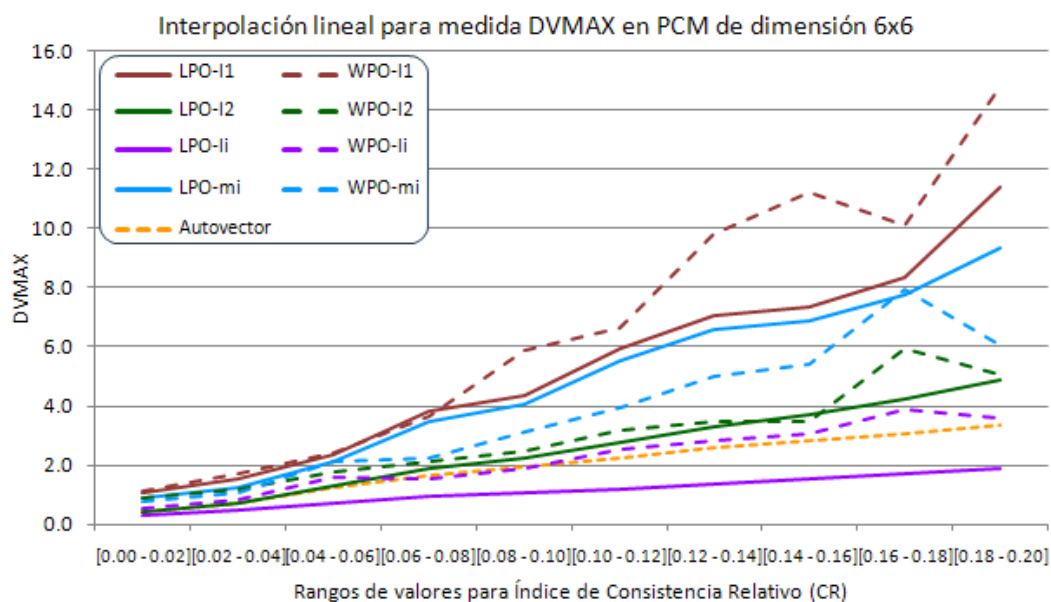


Fig. 3.18: Interpolación lineal para medida DVMAX con PCM de dimensión 6x6

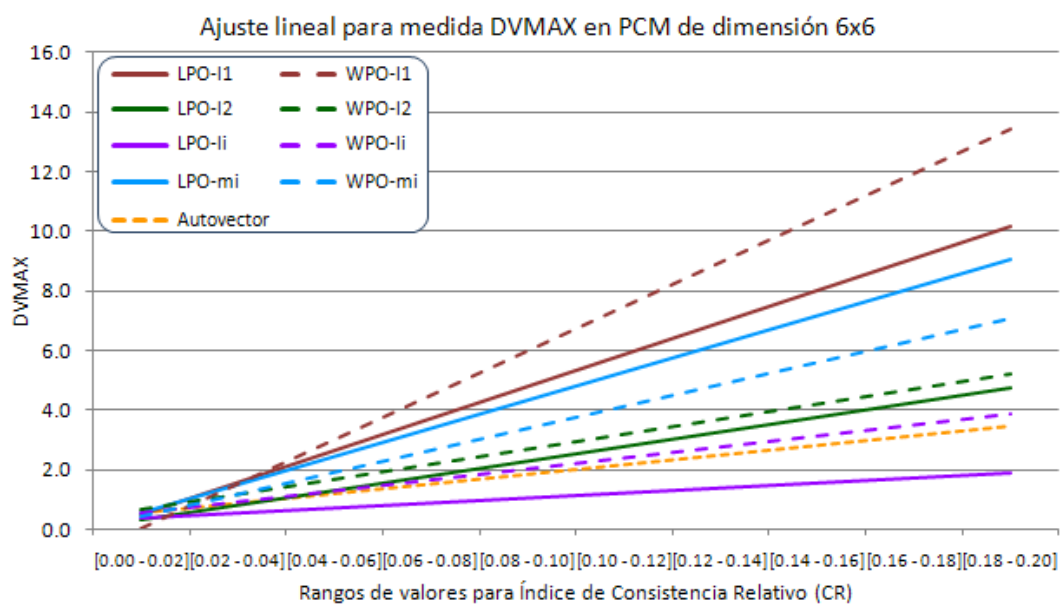


Fig. 3.19: Regresión lineal para medida DVMAX con PCM de dimensión 6x6

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-l1	LPO-l2	LPO-li	LPO-mi	WPO-l1	WPO-l2	WPO-li	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.197	0.167	0.198	0.206	0.219	0.171	0.186	0.210	0.199
[0.02 - 0.04]	0.255	0.216	0.253	0.281	0.265	0.228	0.251	0.291	0.278
[0.04 - 0.06]	0.339	0.282	0.329	0.403	0.335	0.290	0.374	0.434	0.420
[0.06 - 0.08]	0.421	0.366	0.402	0.517	0.388	0.369	0.512	0.575	0.503
[0.08 - 0.10]	0.473	0.408	0.445	0.572	0.464	0.643	0.603	0.663	0.636
[0.10 - 0.12]	0.532	0.483	0.500	0.659	0.513	1.037	0.787	0.823	0.934
[0.12 - 0.14]	0.582	0.522	0.534	0.696	0.569	1.093	0.844	0.878	1.001
[0.14 - 0.16]	0.614	0.542	0.557	0.722	0.605	0.957	0.830	0.921	0.985
[0.16 - 0.18]	0.667	0.580	0.596	0.758	0.657	0.738	0.705	0.752	0.809
[0.18 - 0.20]	0.714	0.695	0.637	0.811	0.722	0.849	0.847	0.916	0.871

Fig. 3.20: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Media Absoluta" (MAD)

Autovector presenta magnitudes del error comparables a las del método $LPO-m_{\infty}$. Los gráficos que interpolan los errores medios obtenidos, presentan un carácter muy oscilante por los métodos sub-optimales. La tendencia del comportamiento de estos métodos (respecto del criterio MAD) al aumentar la consistencia, se aprecia en la Figura 3.22. Se observa que los métodos $WPO-m_{\infty}$ y $WPO-l_{\infty}$ son los que presentan mayores magnitudes del error MAD. $WPO-l_1$ presenta buenos resultados trabajando con matrices con RC menor que 0,08. A partir de ese valor se obtienen resultados muy oscilantes.

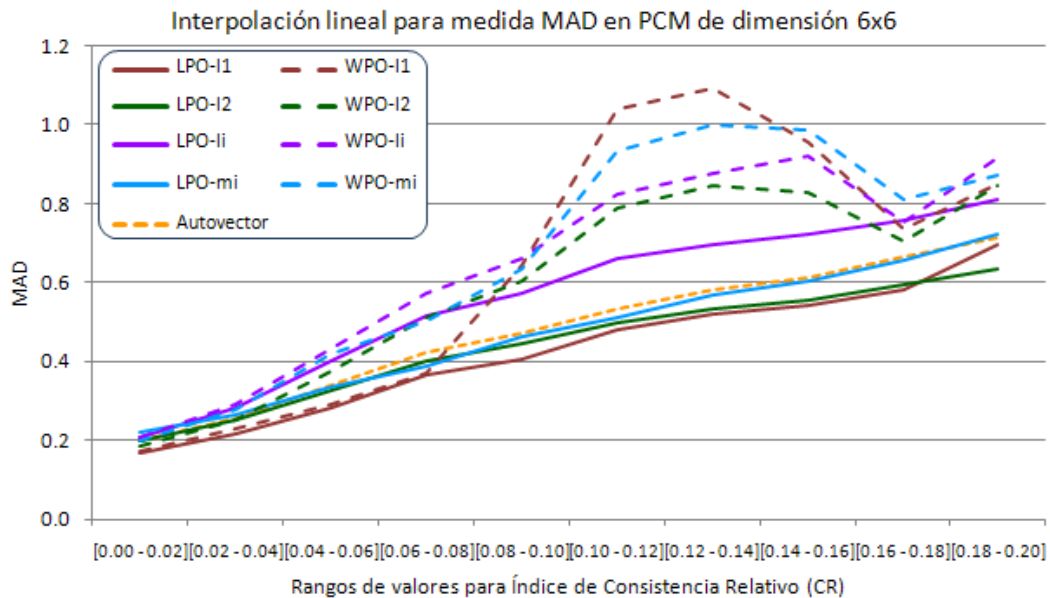


Fig. 3.21: Interpolación lineal para medida MAD con PCM de dimensión 6x6

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

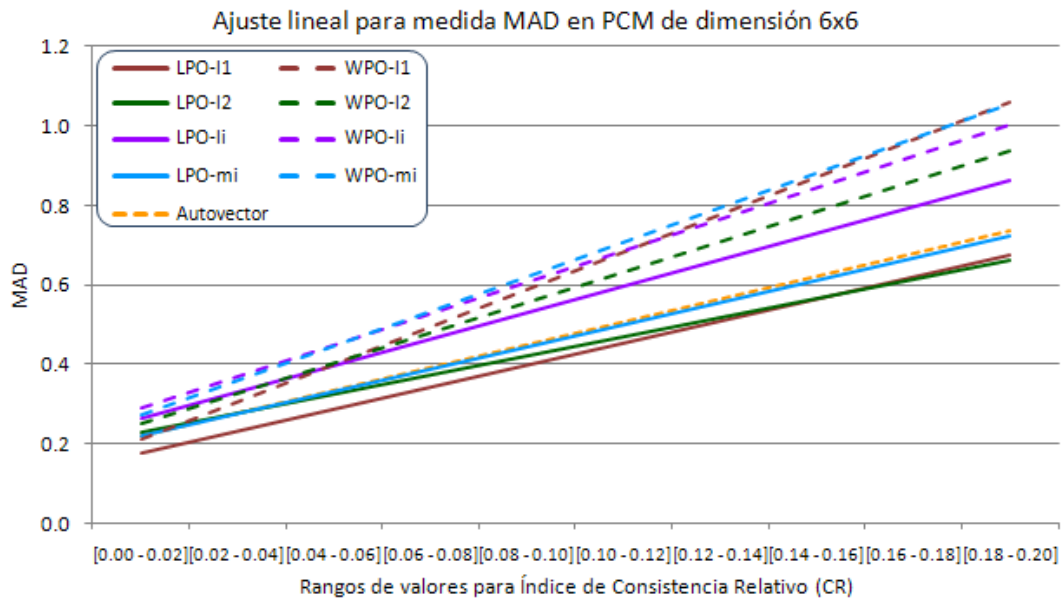


Fig. 3.22: Regresión lineal para medida MAD con PCM de dimensión 6x6

3.5.3. Error Medio Cuadrático (RMSE), caso $n = 6$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida $RMSE$ (3.3) a los métodos de priorización para las PCM de dimensión 6, se presentan en la Figura 3.23. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.24 y 3.25 respectivamente.

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-li	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-li	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.046	0.065	0.046	0.047	0.063	0.068	0.057	0.049	0.062
[0.02 - 0.04]	0.059	0.089	0.059	0.064	0.082	0.097	0.075	0.070	0.083
[0.04 - 0.06]	0.083	0.124	0.083	0.091	0.116	0.129	0.109	0.110	0.132
[0.06 - 0.08]	0.104	0.174	0.106	0.115	0.162	0.169	0.139	0.140	0.152
[0.08 - 0.10]	0.120	0.199	0.123	0.130	0.190	0.305	0.163	0.168	0.198
[0.10 - 0.12]	0.138	0.259	0.144	0.148	0.245	0.430	0.224	0.217	0.291
[0.12 - 0.14]	0.154	0.301	0.164	0.163	0.284	0.533	0.247	0.243	0.325
[0.14 - 0.16]	0.168	0.313	0.180	0.176	0.296	0.530	0.242	0.258	0.325
[0.16 - 0.18]	0.183	0.351	0.200	0.189	0.333	0.439	0.285	0.235	0.371
[0.18 - 0.20]	0.198	0.469	0.223	0.207	0.390	0.606	0.291	0.283	0.309

Fig. 3.23: Datos obtenidos para la medida de error "Error Medio Cuadrático" (RMSE)

Al igual que en el caso de las matrices de dimensión 4×4 , al analizar comparativamente los métodos en función del error medio cuadrático se observa que tres de ellos se comportan de manera similar (y mejor que los métodos restantes),

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

con una tendencia de aumento prácticamente lineal: los métodos log-consistentes con normas vectoriales l_2 y l_∞ (LPO- l_2 y LPO- l_∞) y el método del *Autovector*. Por otra parte, el método que presenta una mayor magnitud para esta medida del error, es el método sub-optimal que utiliza la distancia vectorial l_1 .

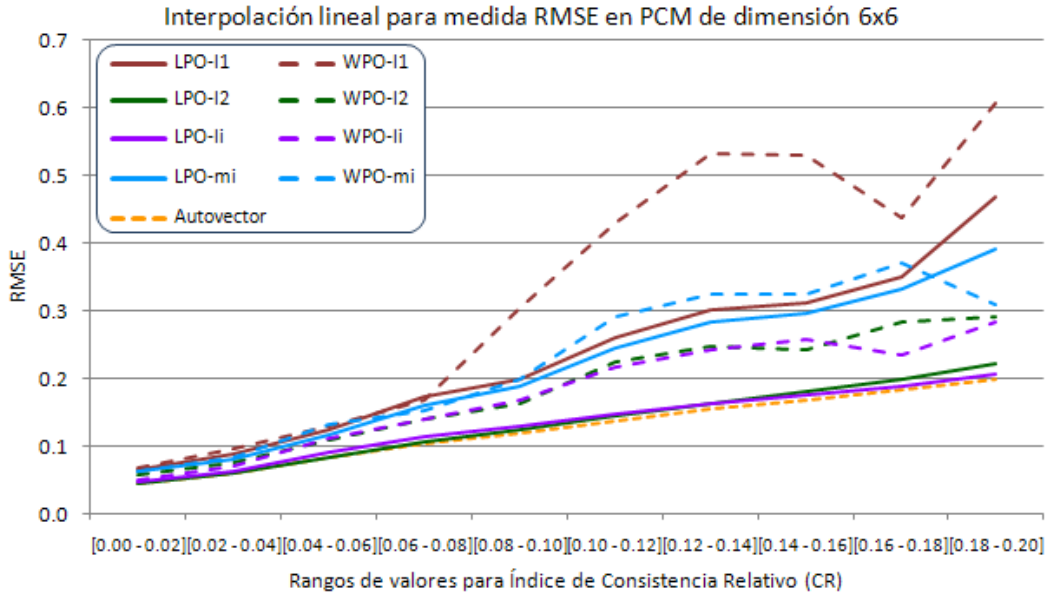


Fig. 3.24: Interpolación lineal para medida RMSE con PCM de dimensión 6x6

3.5.4. Desviación Booleana (MMBD), caso $n = 6$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida *MMBD* (3.4) a los métodos de cálculo del vector de priorización para las PCM de dimensión 6, se presentan en la Figura 3.26. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.27 y 3.28 respectivamente.

Al analizar las matrices de dimensión 6×6 , la medida de la desviación booleana corrobora la robustez del método log-consistente con norma vectorial l_∞ (LPO- l_∞). En la Figura 3.27 se observa el carácter oscilante de los datos medios obtenidos para los distintos métodos. Se hace notar que esta medida es en "algún sentido" ordinal, al evaluar el número de cambios ordinales de preferencia. Al observar la magnitud de la medida *MMBD* en las rectas de tendencia lineal, a medida que aumenta la inconsistencia, tienen también valores del error menores al resto los métodos LPO- l_2 , *Autovector* y WPO- l_∞ . Por otra parte, los métodos con mayores variaciones del sentido de la preferencia al aumentar la inconsistencia de las matrices, son los métodos sub-optimales con norma vectorial l_1 y norma

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

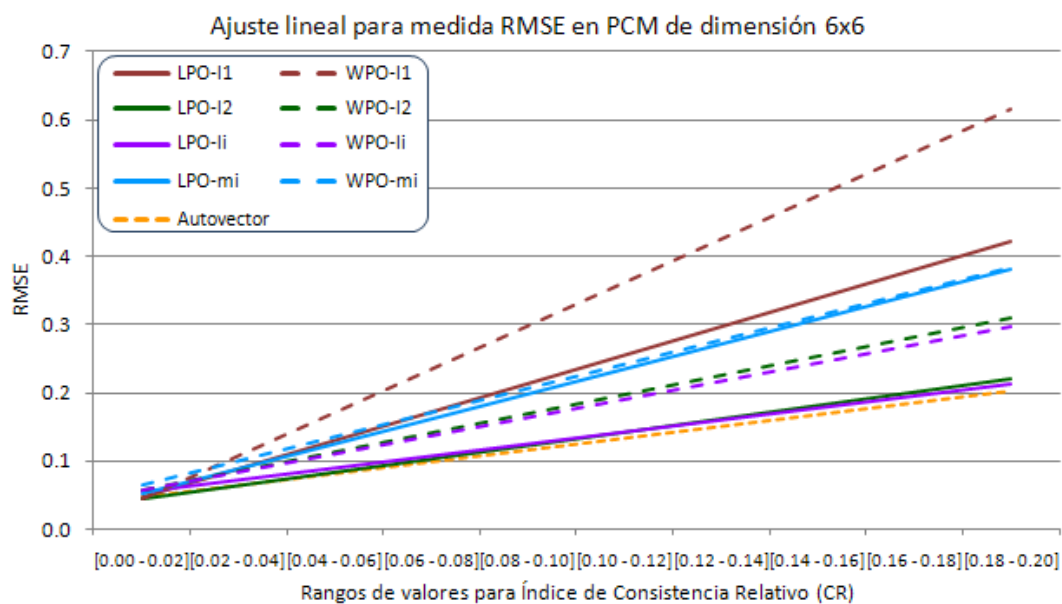


Fig. 3.25: Regresión lineal para medida RMSE con PCM de dimensión 6x6

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
[0.02 - 0.04]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.020	0.000	0.000	0.000	0.050
[0.04 - 0.06]	0.010	0.010	0.010	0.000	0.030	0.010	0.010	0.180	0.350
[0.06 - 0.08]	0.000	0.060	0.050	0.000	0.060	0.060	0.060	0.010	0.140
[0.08 - 0.10]	0.070	0.410	0.350	0.010	0.350	0.820	0.680	0.050	0.760
[0.10 - 0.12]	0.110	0.190	0.130	0.000	0.210	1.440	0.760	0.530	1.020
[0.12 - 0.14]	0.070	0.460	0.120	0.030	0.460	1.430	0.620	0.570	1.100
[0.14 - 0.16]	0.136	0.659	0.295	0.023	0.625	1.227	0.500	0.455	1.011
[0.16 - 0.18]	0.150	0.360	0.130	0.000	0.340	0.520	0.230	0.180	0.350
[0.18 - 0.20]	0.710	0.900	0.340	0.070	0.860	0.900	0.380	0.110	0.660

Fig. 3.26: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Booleana" (MMBD)

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

matricial m_∞ (WPO- l_1 y WPO- m_∞).

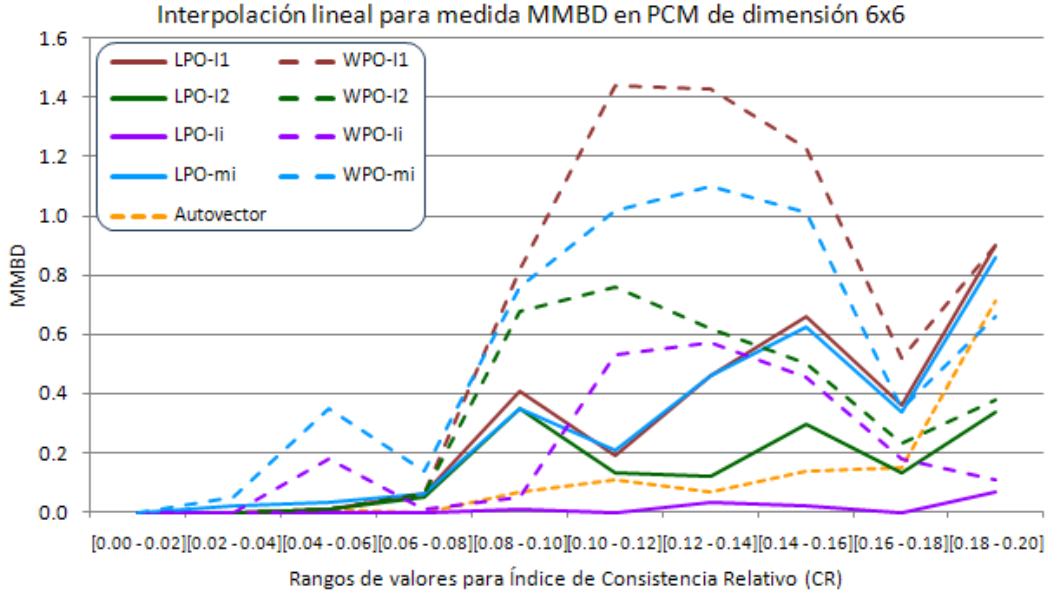


Fig. 3.27: Interpolación lineal para medida MMBD con PCM de dimensión 6x6

3.5.5. Desviación Media (MD), caso $n = 6$

Los datos obtenidos al aplicar la medida MD a los métodos de cálculo del vector de prioridad para las PCM de dimensión 6×6 , se presentan en la Figura 3.29. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.30 y 3.31 respectivamente.

Se observa que el comportamiento de las soluciones proporcionadas por los métodos evaluados respecto de una solución media, se puede agrupar en tre bloques. El método LPO- l_2 mantiene una desviación media notablemente menor al resto de los métodos. El método del *Autovector* y el método WPO- l_2 ofrecen buenos resultados, después de LPO- l_2 , al igual que en el caso de las matrices de dimensión 4. Los restantes métodos, que utilizan la norma vectorial l_1 (WPO- l_1 y LPO- l_1), norma vectorial l_∞ (WPO- l_∞ y LPO- l_∞) y la norma matricial m_∞ (WPO- m_∞ y LPO- m_∞) son los que presentan mayor magnitud de la desviación y - además - mayor variabilidad a medida que aumenta la inconsistencia de las matrices.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

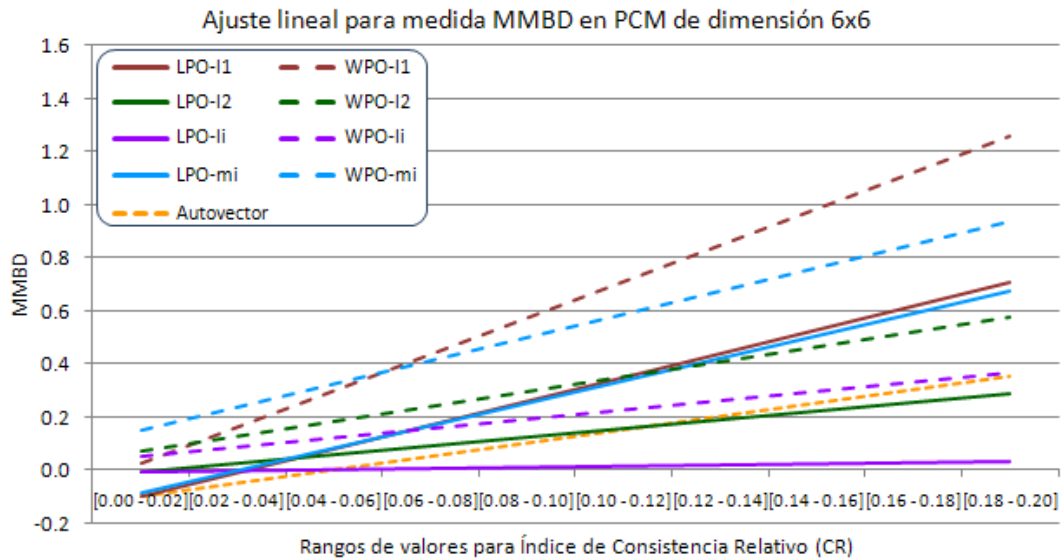


Fig. 3.28: Regresión lineal para medida MMBD con PCM de dimensión 6x6

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.026	0.029	0.022	0.033	0.058	0.030	0.018	0.035	0.033
[0.02 - 0.04]	0.034	0.051	0.025	0.058	0.066	0.051	0.029	0.043	0.048
[0.04 - 0.06]	0.053	0.075	0.031	0.096	0.081	0.076	0.056	0.075	0.076
[0.06 - 0.08]	0.072	0.133	0.043	0.141	0.125	0.123	0.102	0.142	0.113
[0.08 - 0.10]	0.091	0.170	0.057	0.146	0.150	0.177	0.107	0.153	0.147
[0.10 - 0.12]	0.123	0.220	0.078	0.157	0.196	0.200	0.126	0.161	0.179
[0.12 - 0.14]	0.135	0.223	0.080	0.169	0.196	0.219	0.146	0.171	0.200
[0.14 - 0.16]	0.131	0.189	0.072	0.150	0.158	0.203	0.148	0.170	0.191
[0.16 - 0.18]	0.099	0.141	0.065	0.173	0.149	0.147	0.091	0.140	0.128
[0.18 - 0.20]	0.139	0.181	0.062	0.182	0.149	0.184	0.144	0.163	0.194

Fig. 3.29: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Media" (MD)

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

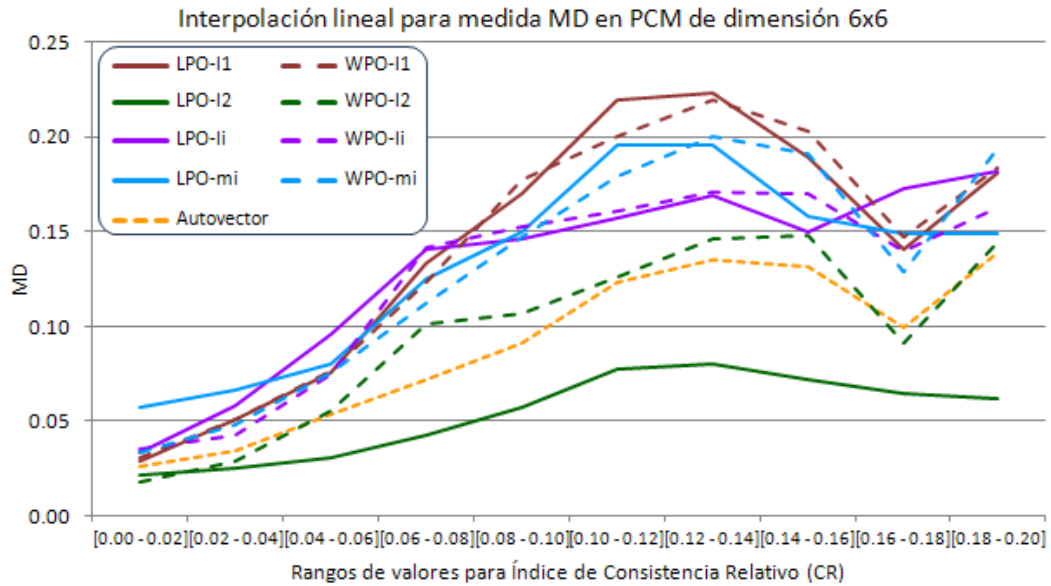


Fig. 3.30: Interpolación lineal para medida MD con PCM de dimensión 6x6

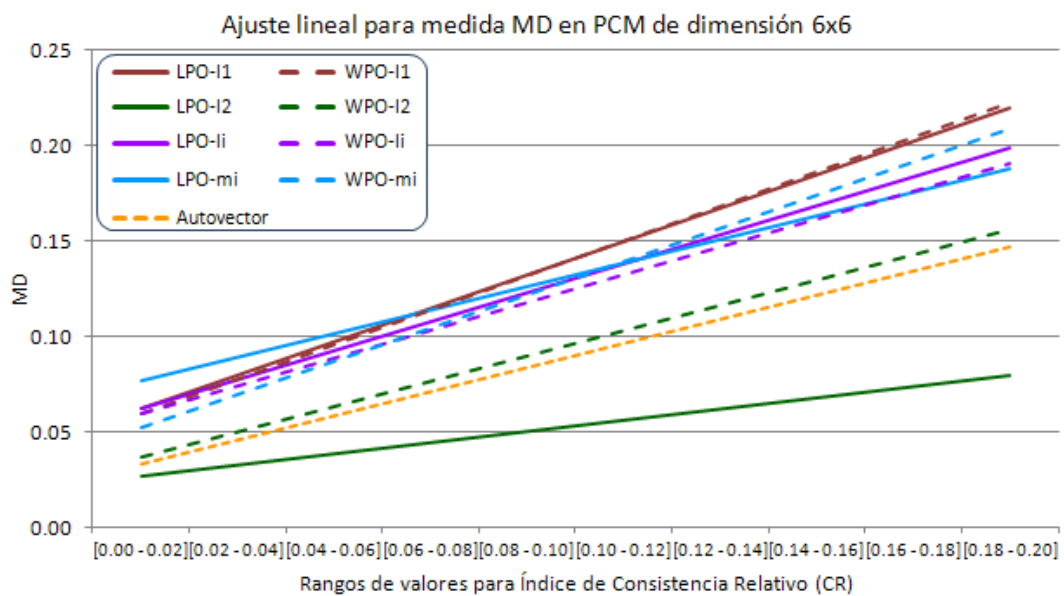


Fig. 3.31: Regresión lineal para medida MD con PCM de dimensión 6x6

3.6. Resultados del experimento 3. Evaluación de métodos de priorización en función de la inconsistencia. Caso $n = 8$

En esta sección se describen y analizan los resultados obtenidos del experimento diseñado para PCM de dimensión 8. Se presentan los datos correspondientes a cada uno de los criterios de medida (introducidos en la Sección 3.3), mediante tablas y gráficos comparativos de los distintos métodos para ayudar a su visualización. Los resultados fueron agrupados según rangos de valores de amplitud 0,02 para el parámetro (CR). Así, en cada caso, se calculó la media aritmética de la medida correspondiente, para todas las PCM de la muestra cuyo CR estaba en el mismo rango de CR . A partir de estos datos medios para cada rango de CR se ha construido una tabla con los datos representados atendiendo a una escala de colores y se han obtenido la recta a trazos de interpolación y la recta de regresión lineal que ajusta dichos datos.

Se hace notar que en todas las medidas consideradas, los datos obtenidos para los distintos métodos difieren poco si la razón de consistencia es pequeña. Las diferencias se incrementan al aumentar la razón de consistencia.

A continuación se describen los resultados obtenidos al aplicar los métodos del experimento a matrices de comparación por pares de entrada, de dimensión 8×8 .

3.6.1. Desviación Máxima ($DVMAX$), caso $n = 8$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida $DVMAX$ (3.1) a los métodos de cálculo del vector de priorización para las PCM de dimensión 8, se presentan en la Figura 3.32. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.33 y 3.34 respectivamente.

Al igual que en el caso de las matrices de dimensiones 4×4 y 6×6 , se observa que, considerando esta medida de error, el método que tiene un mejor comportamiento a medida que aumenta la inconsistencia de las matrices es el método log-consistente con norma vectorial infinito ($LPO-l_i$). Del mismo modo, presentan magnitudes del error comparativamente bajas respecto al resto, los métodos del *Autovector* y $LPO-l_2$. Por otra parte, los métodos que presentan una mayor magnitud para esta medida del error, son aquellos que utilizan distancias vectoriales l_1 y matriciales m_∞ ($WPO-l_1$, $WPO-m_\infty$, $LPO-l_1$ y $LPO-m_\infty$).

3.6.2. Desviación Media Absoluta (MAD), caso $n = 8$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida MAD (3.2) a los métodos de cálculo del vector de priorización para las PCM de dimensión 8, se presentan

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.248	0.524	0.251	0.178	0.426	0.569	0.364	0.300	0.401
[0.02 - 0.04]	0.423	0.781	0.428	0.336	0.717	1.079	0.771	0.643	0.876
[0.04 - 0.06]	0.601	1.300	0.619	0.448	1.112	1.609	1.009	0.841	1.149
[0.06 - 0.08]	0.723	1.477	0.748	0.542	1.384	1.984	1.321	1.084	1.546
[0.08 - 0.10]	0.833	1.699	0.868	0.665	1.599	2.250	1.498	1.255	1.787
[0.10 - 0.12]	0.913	1.997	0.958	0.725	1.861	2.688	1.864	1.559	2.264
[0.12 - 0.14]	1.048	2.389	1.106	0.782	2.231	3.392	2.016	1.623	2.568
[0.14 - 0.16]	1.127	2.606	1.201	0.873	2.461	3.566	2.232	1.902	3.195
[0.16 - 0.18]	1.228	2.822	1.333	0.955	2.684	3.891	2.424	1.990	3.226
[0.18 - 0.20]	1.329	3.492	1.449	1.014	3.179	4.538	2.446	2.106	3.883

Fig. 3.32: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Máxima" (DVMAX)

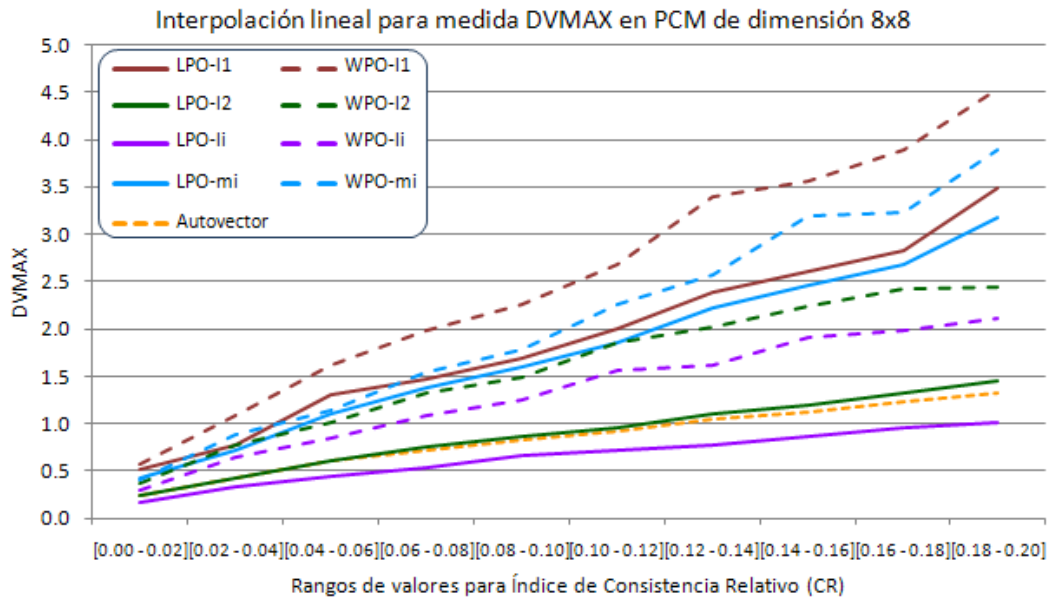


Fig. 3.33: Interpolación lineal para medida DVMAX con PCM de dimensión 8x8

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

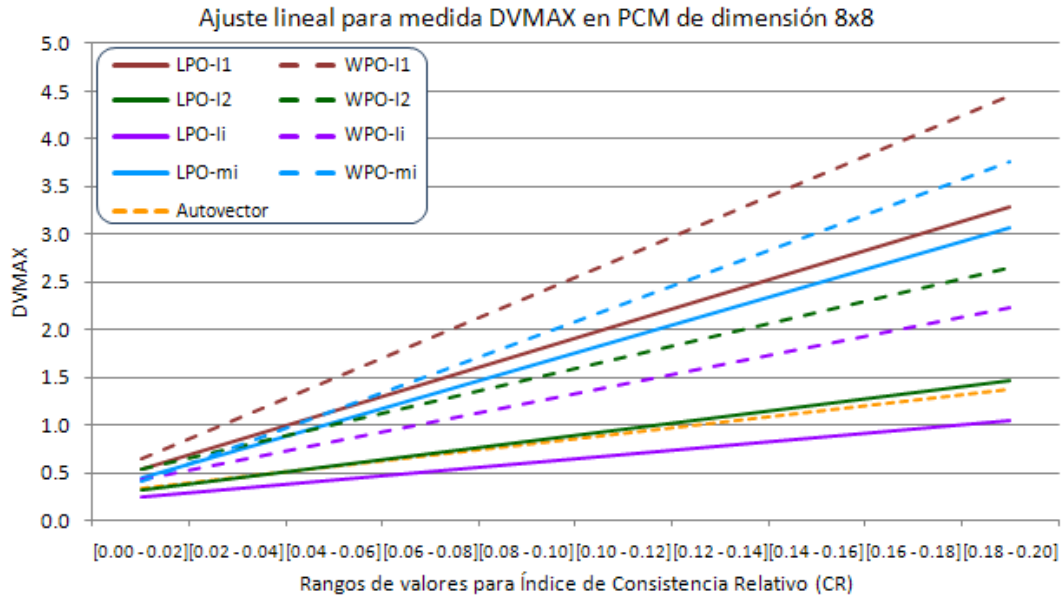


Fig. 3.34: Regresión lineal para medida DVMAX con PCM de dimensión 8x8

en la Figura 3.35. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.36 y 3.37 respectivamente.

Al analizar los datos y gráficas correspondientes a la medida de error MAD para la aplicación de los métodos sobre matrices de dimensión 8×8 , se observa, al igual que para las matrices de menor dimensión, que los métodos log-consistentes tienen un mejor comportamiento que los métodos sub-optimales. En particular, los métodos $LPO-l_1$, $LPO-l_2$ y $LPO-m_\infty$, son los que presentan menor magnitud del error. Del mismo modo, el método del *Autovector* presenta magnitudes del error comparables a las de los métodos anteriores. Por el contrario, los métodos $WPO-m_\infty$, $WPO-l_\infty$ y $WPO-l_1$ son los que presentan mayores magnitudes del error MAD.

3.6.3. Error Medio Cuadrático (RMSE), caso $n = 8$

Los datos obtenidos al aplicar el criterio de medida $RMSE$ (3.3) a los métodos de cálculo del vector de priorización para las PCM de dimensión 8, se presentan en la Figura 3.38. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.39 y 3.40 respectivamente.

En el caso de las matrices de dimensión 8×8 , al analizar comparativamente los métodos en función del error medio cuadrático, tres de ellos se comportan de

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.155	0.116	0.155	0.171	0.150	0.153	0.166	0.180	0.163
[0.02 - 0.04]	0.265	0.218	0.263	0.283	0.254	0.310	0.296	0.327	0.315
[0.04 - 0.06]	0.353	0.285	0.348	0.383	0.339	0.368	0.377	0.405	0.404
[0.06 - 0.08]	0.427	0.367	0.423	0.469	0.404	0.508	0.501	0.518	0.542
[0.08 - 0.10]	0.482	0.420	0.473	0.510	0.468	0.541	0.549	0.583	0.606
[0.10 - 0.12]	0.536	0.490	0.529	0.568	0.552	0.668	0.645	0.652	0.712
[0.12 - 0.14]	0.588	0.529	0.573	0.638	0.596	0.754	0.700	0.739	0.816
[0.14 - 0.16]	0.634	0.579	0.621	0.694	0.630	0.771	0.749	0.770	0.897
[0.16 - 0.18]	0.679	0.619	0.657	0.720	0.687	0.840	0.798	0.834	0.950
[0.18 - 0.20]	0.731	0.697	0.710	0.776	0.782	0.973	0.868	0.879	1.114

Fig. 3.35: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Media Absoluta" (MAD)

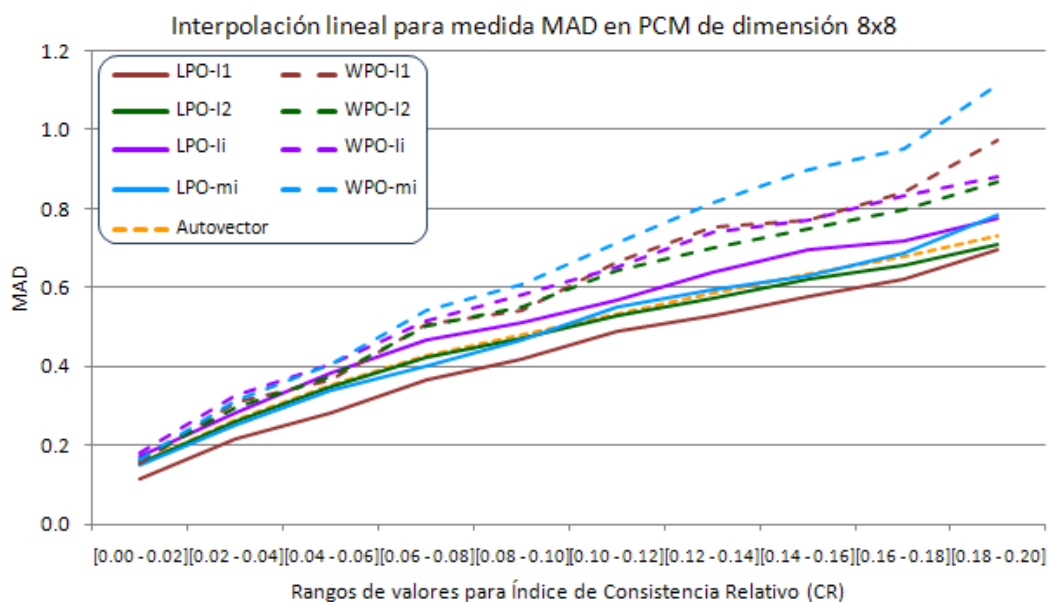


Fig. 3.36: Interpolación lineal para medida MAD con PCM de dimensión 8x8

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

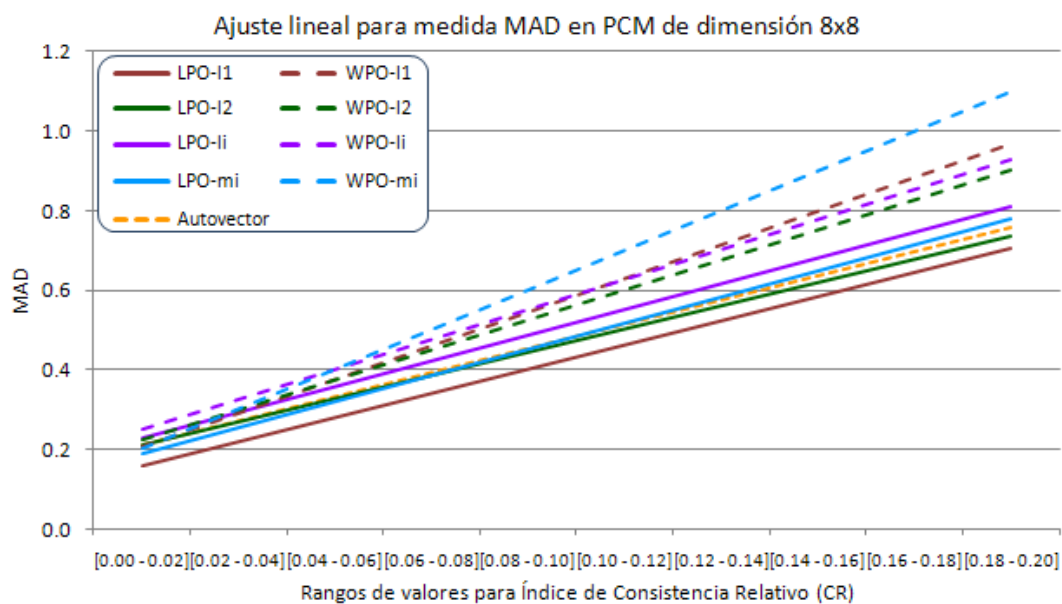


Fig. 3.37: Regresión lineal para medida MAD con PCM de dimensión 8x8

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.052	0.074	0.052	0.055	0.072	0.087	0.065	0.062	0.073
[0.02 - 0.04]	0.090	0.117	0.090	0.094	0.114	0.160	0.120	0.114	0.138
[0.04 - 0.06]	0.119	0.173	0.119	0.125	0.163	0.216	0.156	0.146	0.180
[0.06 - 0.08]	0.143	0.202	0.143	0.149	0.198	0.274	0.205	0.187	0.240
[0.08 - 0.10]	0.166	0.231	0.166	0.172	0.226	0.300	0.226	0.210	0.268
[0.10 - 0.12]	0.184	0.274	0.184	0.190	0.268	0.371	0.274	0.246	0.330
[0.12 - 0.14]	0.202	0.303	0.202	0.209	0.304	0.436	0.296	0.271	0.379
[0.14 - 0.16]	0.218	0.339	0.218	0.228	0.327	0.460	0.322	0.296	0.440
[0.16 - 0.18]	0.235	0.360	0.235	0.240	0.357	0.496	0.348	0.314	0.456
[0.18 - 0.20]	0.253	0.438	0.253	0.259	0.420	0.592	0.366	0.336	0.552

Fig. 3.38: Datos obtenidos para la medida de error "Error Medio Cuadrático" (RMSE)

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

manera similar y mejor que los métodos restantes, con una tendencia de aumento prácticamente lineal: el método del autovector y los métodos log-consistentes con normas vectoriales l_1 y l_∞ (LPO- l_1 y LPO- l_∞). Por otra parte, los métodos que utilizan la norma vectorial l_1 y la norma matricial m_∞ (LPO- l_1 , WPO- l_1 , LPO- m_∞ y WPO- m_∞) presentan un error de tendencia creciente y considerablemente mayor al resto.

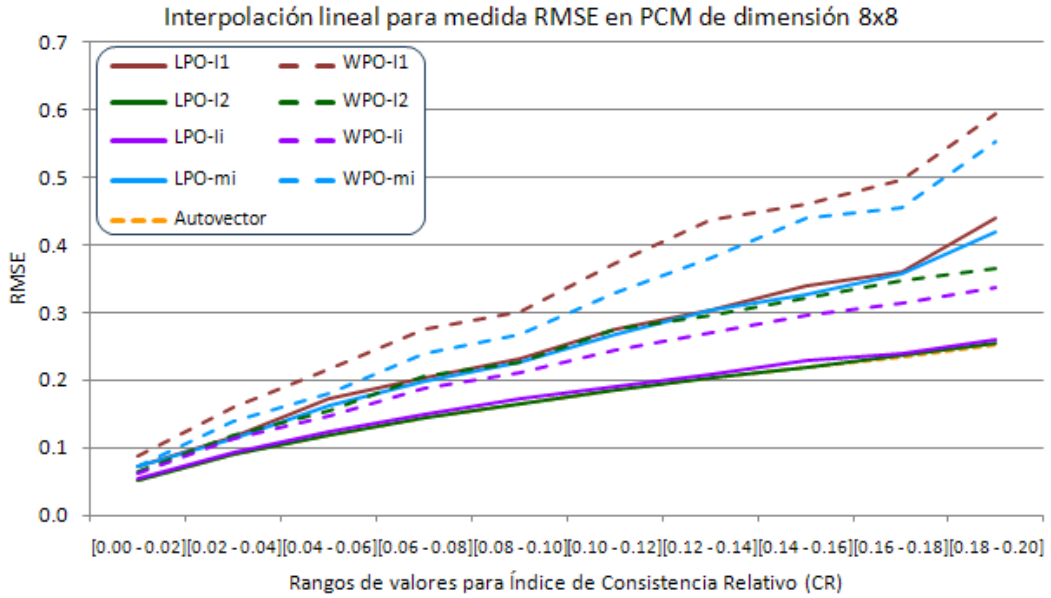


Fig. 3.39: Interpolación lineal para medida RMSE con PCM de dimensión 8x8

3.6.4. Desviación Booleana (MMBD), caso $n = 8$

Los datos obtenidos al aplicar la medida *MMBD* a los métodos de cálculo del vector de prioridad para las PCM de dimensión 8×8 , se presentan en la Figura 3.41. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.42 y 3.43 respectivamente.

La medida de la desviación booleana, proporciona datos de robustez de los métodos log-consistentes con normas vectoriales l_2 y l_∞ (LPO- l_2 y LPO- l_∞) y del *Autovector*, dado que para esos métodos no se produce una inversión de la preferencia en alguno de los pares de opciones. Del mismo modo, los métodos sub-optimales presentan, en general, mayores magnitudes para esta medida del error, sobretodo a medida que aumenta la inconsistencia de las matrices.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

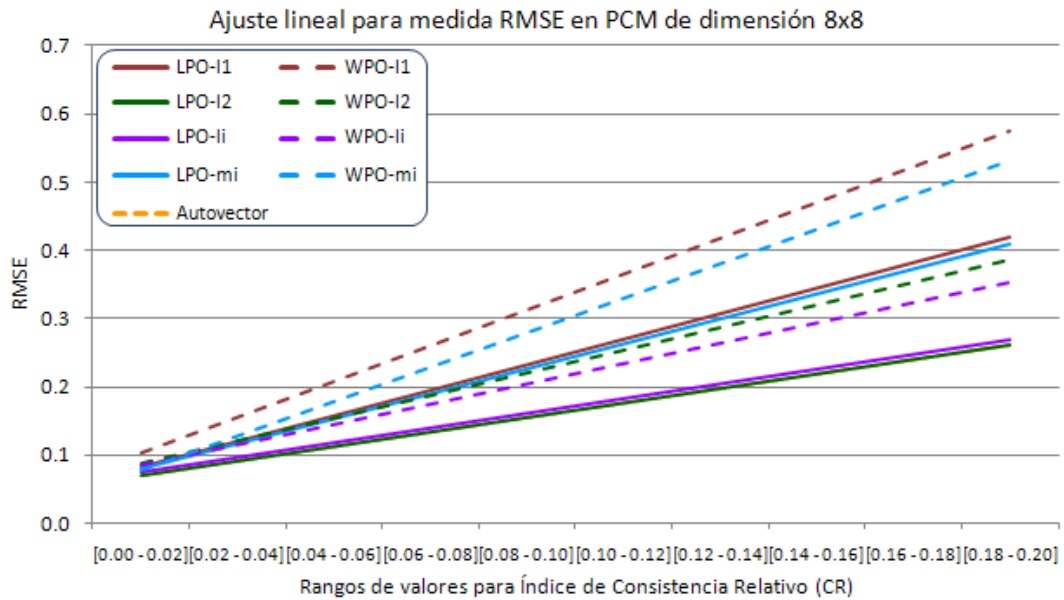


Fig. 3.40: Regresión lineal para medida RMSE con PCM de dimensión 8x8

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO-I1	LPO-I2	LPO-Ii	LPO-mi	WPO-I1	WPO-I2	WPO-Ii	WPO-mi
[0.00 - 0.02]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
[0.02 - 0.04]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
[0.04 - 0.06]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.020
[0.06 - 0.08]	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.130	0.080	0.000	0.010
[0.08 - 0.10]	0.000	0.010	0.000	0.000	0.010	0.030	0.040	0.000	0.030
[0.10 - 0.12]	0.000	0.010	0.000	0.000	0.010	0.140	0.160	0.010	0.220
[0.12 - 0.14]	0.000	0.010	0.000	0.000	0.010	0.130	0.080	0.000	0.100
[0.14 - 0.16]	0.000	0.040	0.000	0.000	0.030	0.120	0.140	0.080	0.210
[0.16 - 0.18]	0.000	0.030	0.000	0.000	0.050	0.160	0.120	0.080	0.190
[0.18 - 0.20]	0.000	0.090	0.000	0.000	0.120	0.230	0.200	0.150	0.320

Fig. 3.41: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Booleana" (MMBD)

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

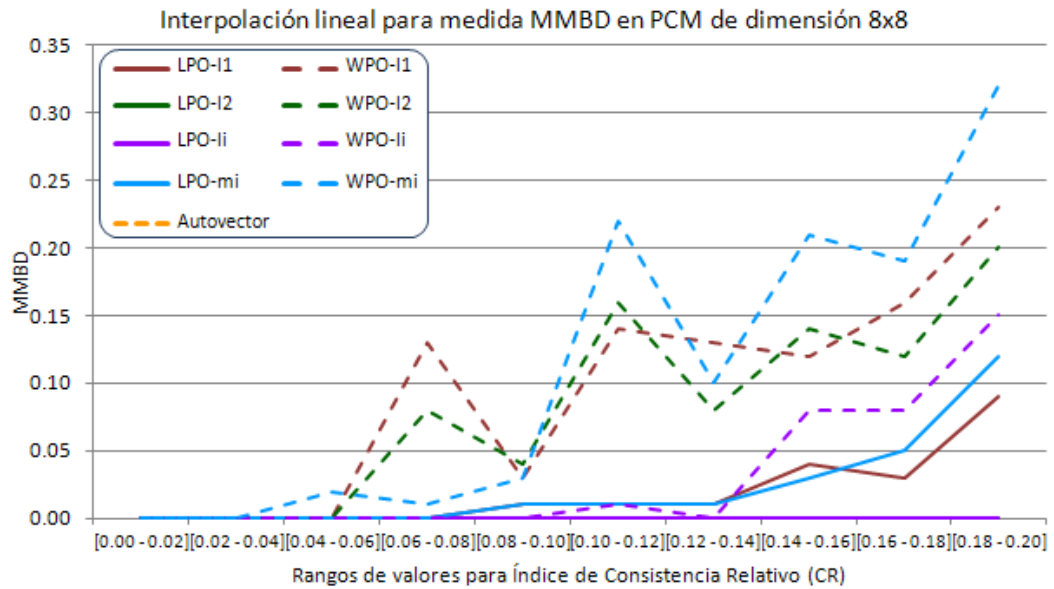


Fig. 3.42: Interpolación lineal para medida MMBD con PCM de dimensión 8x8

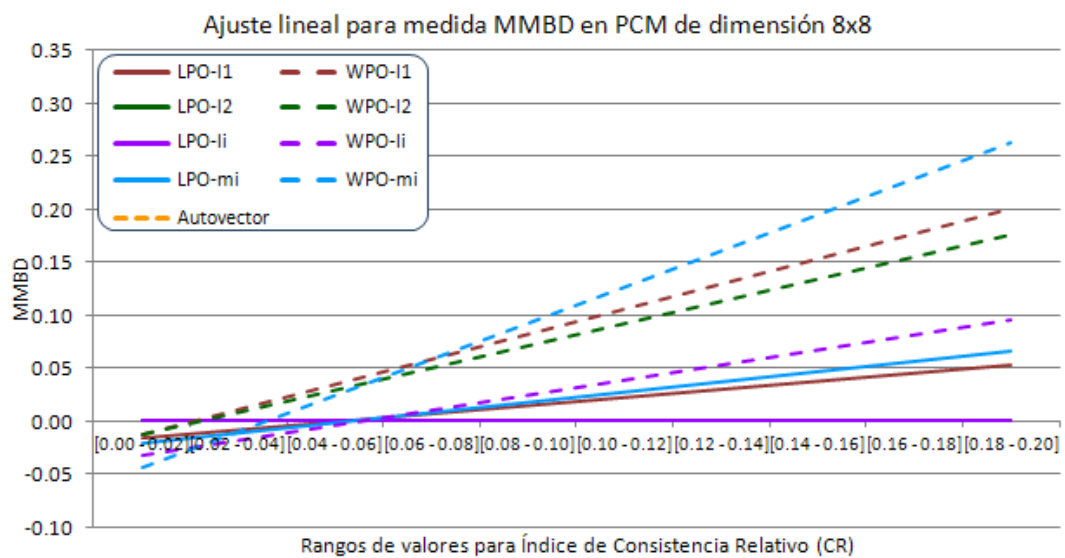


Fig. 3.43: Regresión lineal para medida MMBD con PCM de dimensión 8x8

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

Rango CR	Método de solución								
	Autovector	LPO- l_1	LPO- l_2	LPO- l_i	LPO- l_∞	WPO- l_1	WPO- l_2	WPO- l_i	WPO- l_∞
[0.00 - 0.02]	0.019	0.042	0.019	0.033	0.039	0.042	0.014	0.029	0.037
[0.02 - 0.04]	0.032	0.064	0.031	0.045	0.064	0.068	0.029	0.042	0.067
[0.04 - 0.06]	0.041	0.078	0.038	0.066	0.075	0.082	0.035	0.050	0.076
[0.06 - 0.08]	0.049	0.103	0.044	0.072	0.102	0.102	0.053	0.058	0.103
[0.08 - 0.10]	0.055	0.100	0.049	0.077	0.098	0.107	0.055	0.065	0.101
[0.10 - 0.12]	0.059	0.129	0.054	0.080	0.133	0.128	0.067	0.063	0.121
[0.12 - 0.14]	0.067	0.134	0.062	0.090	0.142	0.137	0.078	0.080	0.136
[0.14 - 0.16]	0.072	0.138	0.065	0.108	0.128	0.141	0.074	0.076	0.138
[0.16 - 0.18]	0.072	0.134	0.064	0.095	0.136	0.137	0.079	0.080	0.136
[0.18 - 0.20]	0.081	0.188	0.072	0.102	0.183	0.177	0.096	0.089	0.169

Fig. 3.44: Datos obtenidos para la medida de error "Desviación Media" (MD)

3.6.5. Desviación Media (MD), caso $n = 8$

Los datos obtenidos al aplicar la medida MD a los métodos de cálculo del vector de prioridad para las PCM de dimensión 8×8 , se presentan en la Figura 3.44. Las gráficas correspondientes a la curva de interpolación lineal a trozos y a la regresión lineal para cada método, se presentan en las figuras 3.45 y 3.46 respectivamente.

Al analizar el comportamiento de cada método respecto de la media de todos los métodos, se puede concluir, al igual que en el caso de las matrices de dimensión 4×4 y 6×6 que el método LPO- l_2 sobresale al mantener una desviación media menor al resto de los métodos. El método del autovector, aunque con una magnitud ligeramente superior, tiene del mismo modo un comportamiento estable mientras las matrices son consistentes. De manera opuesta, los métodos que utilizan la norma vectorial l_1 (WPO- l_1 y LPO- l_1) y l_∞ (WPO- l_∞ y LPO- l_∞) son los que presentan mayor magnitud de la desviación, sobre todo cuando las matrices son inconsistentes.

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE MÉTODOS

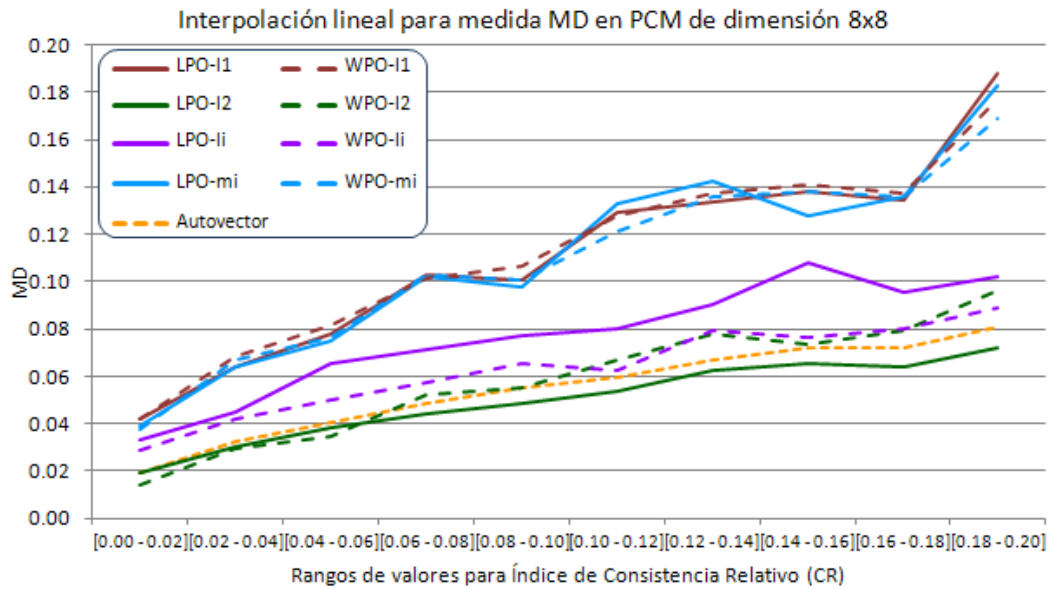


Fig. 3.45: Interpolación lineal para medida MD con PCM de dimensión 8x8

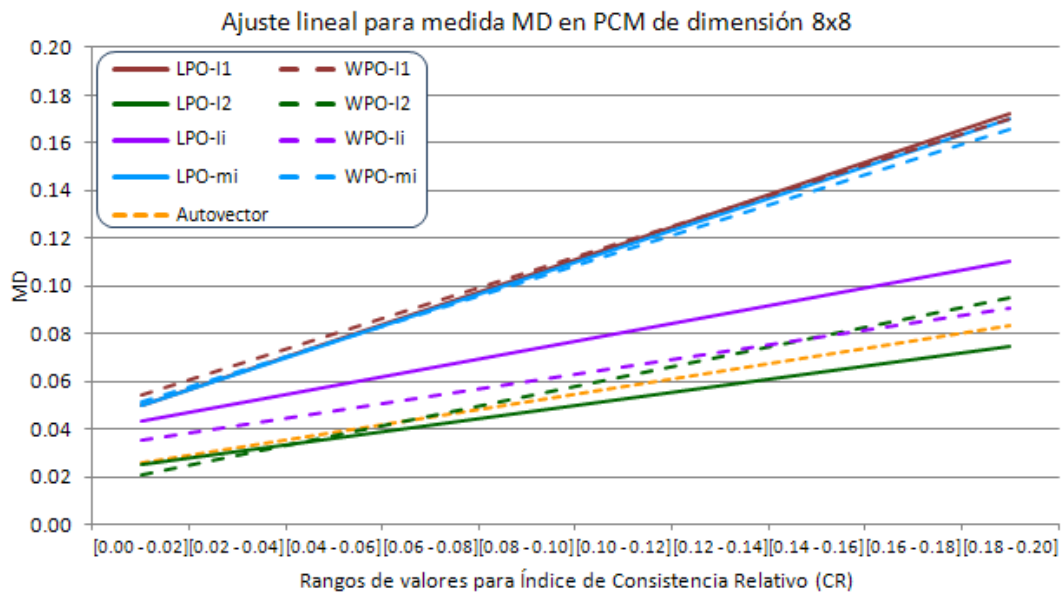


Fig. 3.46: Regresión lineal para medida MD con PCM de dimensión 8x8

4. CÁLCULO DE VECTORES DE PRIORIDAD EN PROBLEMAS DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

4.1. Introducción

En este capítulo, se considera un problema de decisión de grupo en el que los expertos de un grupo evalúan individualmente un conjunto finito de alternativas con el objetivo de determinar la mejor y, más en general, la ordenación de dichas alternativas atendiendo a su peso de relevancia.

Se considera un conjunto finito de alternativas x_1, x_2, \dots, x_n . Se supone que la información de preferencias sobre dichas alternativas, proviene de distintas fuentes, de varios expertos, con el objetivo de representar de manera más exhaustiva la naturaleza compleja del problema que se aborda. Se asume así la existencia de un grupo de expertos E_1, E_2, \dots, E_m , con $m > 1$, cada uno de los cuales expresa sus juicios de preferencias mediante una matriz de comparación por pares M^k , $k = 1, \dots, m$. Nos enfrentamos entonces, a un problema de decisión de grupo. En este escenario, la información será mas rica y mas diversa, pero posiblemente no homogénea e incompatible, atendiendo a los distintos enfoques e intereses de los expertos. En general no habrá consenso entre los expertos, entendido como acuerdo unánime en los juicios de preferencias. Las complejidades derivadas del proceso de toma de decisiones de grupo, son referidas en [Arr50], y tienen sus primeras referencias en los trabajos de Borda y Condorcet a fines del siglo XVIII en trabajos de aplicación de técnicas matemáticas a procesos de elección social. En su artículo, Arrow plantea las dificultades de las decisiones de grupo, como producto de la racionalidad colectiva, entendida como la búsqueda de un óptimo social? a partir de los deseos e intereses individuales.

Se hace notar que al problema de inconsistencia, que surge al trabajar con matrices de comparación por pares (como se planteó en el capítulo 2), se le añade el problema de manejo de información múltiple y posiblemente incompatible.

Por otra parte, en muchas aplicaciones son situaciones comunes la existencia de preferencias cualitativas, la falta de información, la información difícilmente cuantificable o expresada en términos lingüísticos o mediante rangos, difíciles de expresar mediante valores puntuales numéricos. Atendiendo a ello, parece natural intentar representar este tipo de información vaga e imprecisa y adaptar los

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

modelos propuestos para que permitan el uso de datos imprecisos. En este capítulo, trabajaremos con datos intervalares (numéricos) para representar los juicios de preferencias (posiblemente imprecisos), como un modo de representar la imprecisión de los juicios dados por los expertos. En [BJ00], se plantean varias razones que justifican el uso de datos intervalares:

- Estudios experimentales sugieren que las expresiones lingüísticas se simulan mejor por rangos de valores que por valores numéricos puntuales.
- En los problemas de decisión de grupo a considerar, la utilización de valores intervalares proporciona mayor flexibilidad y un margen más amplio al considerar los posibles rangos de variación de la solución. Esto tiene una interpretación asociada a la tolerancia, como aporte a la búsqueda de una solución compromiso del grupo.

Estas consideraciones nos llevan a asumir que cada experto expresa sus preferencias mediante matrices de comparación por pares con datos intervalares, como modo de expresar juicios de preferencias (posiblemente imprecisos).

Así, el problema que se aborda es el siguiente. Dado un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y un conjunto de expertos E_1, E_2, \dots, E_m , que expresan sus juicios en matrices de comparación por pares M^1, M^2, \dots, M^m , con datos intervalares, calcular un vector de prioridad del grupo $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$ que refleje "lo mejor posible" (en algún sentido que se precisará) la información de preferencias (posiblemente inconsistente, incompatible e imprecisa) contenida en las matrices M^k , $k = 1, \dots, m$. El objetivo es proporcionar un marco teórico general, métodos y algoritmos para explotar la sinergia de la información de preferencias obtenida a partir de múltiples fuentes (expertos), de forma que la decisión resultante sea una "representante óptima" del conjunto de posibles decisiones o prioridades de los expertos del grupo, o - dicho de otro modo - que la decisión del grupo sea la "mejor posible", en términos que se precisarán más adelante.

En este contexto, como ya se ha señalado, nos enfrentamos simultáneamente a varios problemas:

- Problema de consistencia: Calcular vectores de prioridad a partir de PCM no necesariamente consistentes.
- Problema de decisión de grupo ($m > 1$): Se trata de buscar soluciones de grupo que sean las que mejor reflejen e integren las múltiples preferencias (posiblemente en conflicto) de los expertos.
- Problema de manejo de la imprecisión: Suponemos que los datos de partida son intervalares, como forma de integrar la posibilidad de datos imprecisos.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

El problema de la consistencia para el caso particular de un experto ($m = 1$) con datos puntuales se ha estudiado exhaustivamente en el capítulo 2. En este caso, las principales métodos de resolución atienden principalmente a dos enfoques. Por una parte, se ha abordado en el contexto del AHP, a partir del método del autovector principal (Sección 2.3) y por otra, se ha planteado como un problema de aproximación matricial (Sección 2.3).

El problema de grupo ($m > 1$), a partir de matrices de comparación por pares con datos puntuales, se ha abordado en la literatura en el contexto del AHP (([EMJ07], [MJAJRPTL05], [BG03], [CC08], [CR01], [RG94], [FP98], [HL96], [AS83])). Los métodos propuestos extienden el método del autovector principal al caso de varios expertos, siguiendo básicamente dos estrategias. La primera, consiste en sintetizar los juicios pareados dados por los expertos, en una matriz $G = (g_{ij})$, con:

$$g_{ij} = \left(\prod_{k=1}^m m_{ij}^k \right)^{1/m}, \quad (4.1)$$

para posteriormente extraer el vector de prioridad a partir de la matriz G . El segundo procedimiento consiste, en general, en calcular el vector de prioridad del grupo como media aritmética (o geométrica en algunos trabajos) de los vectores de prioridad individuales w^k , $k = 1, \dots, m$, obtenidos a partir de las matrices M^k , $k = 1, \dots, m$:

$$w = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m w^k. \quad (4.2)$$

Estos métodos no son aplicables directamente al caso de datos imprecisos. Se han tratado de extender para manejar juicios intervalares, mediante simulación de preferencias con matrices puntuales generadas como muestras de las PCM intervalares de partida. Posteriormente, se calculan los vectores de prioridad asociados a cada matriz puntual, mediante el método del autovector, y el promedio de dichos vectores se propone como vector de prioridad. En esta línea, en [SV87] se utiliza un enfoque de simulación Monte Carlo que genera pesos intervalares a partir de una PCM intervalar ($m = 1$).

En [Hai98] se propone un enfoque estadístico para obtener los pesos de las alternativas a partir de PCM intervalares. Para esto se evalúan dos distribuciones sobre la región de factibilidad, usando la media de las distribuciones como base para la cuantificación de las preferencias y el cálculo del ranking.

En [Arb89] y [Arb91], los juicios intervalares se interpretan como restricciones lineales, planteando el problema como un problema de programación lineal (LP). Este método es analizado en [Kre91], cuyo autor concluye que no es efectivo para PCM intervalares inconsistentes. El enfoque de estos métodos es extendido en [SH92], [SH95] a estructuras jerárquicas.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

Investigaciones posteriores incorporan la posibilidad de trabajar con información de preferencias intervalar en problemas de grupo ($m > 1$) en el contexto del AHP ([CGW05], [BJ00], [HK94]). La mayoría de los métodos propuestos en la literatura que permiten trabajar con datos intervalares, proporcionan vectores de pesos intervalares. Por tanto, en caso de solapamiento de intervalos, se requiere el uso adicional de técnicas para ordenar las alternativas, atendiendo a su relevancia. Otra técnica para representar juicios pareados imprecisos es utilizar conjuntos difusos (ver por ejemplo, [BdGL89], [Yu02], [Mik04]). En estos casos, los pesos resultantes vienen dados por números difusos, por lo que se requieren adicionalmente técnicas de transformación de esos números para obtener un ordenación final de las alternativas. Esta línea de estudio no se ha considerado en este trabajo y está pendiente de ser abordada en futuros trabajos de investigación.

Por otra parte, los trabajos que abordan los problemas de consistencia, grupo e imprecisión en la literatura, desde un enfoque basado en distancias serán referidos a lo largo del desarrollo del capítulo, en relación con los procedimientos propuestos.

En este capítulo se plantea el problema en un marco teórico general de optimización vectorial, en un espacio normado de matrices. En dicho modelo, se busca una solución que maximice la satisfacción del grupo, donde el concepto de optimalidad se define en función de operadores de agregación de funciones objetivo (que articulan la estrategia del grupo) y de la norma matricial utilizada. Por otra parte, se proporcionan algoritmos de resolución de los problemas de optimización resultantes con datos intervalares, para las métricas más usuales, mediante el uso de técnicas de programación por metas. El marco propuesto integra y extiende varias de las líneas de investigación actuales en el tema. Además relaja condiciones y restricciones al problema que se asumen en los métodos propuestos en la literatura. Por otra parte, a diferencia de muchos de los métodos descritos en la literatura, el enfoque planteado no asume la homogeneidad entre los expertos del grupo de decisión, permitiendo su diferenciación de acuerdo a su experiencia, roles o cualquier otro tipo de segmentación. Además, las soluciones de grupo que se obtienen vienen dadas por vectores de pesos puntuales, proporcionando automáticamente una ordenación de las alternativas.

Resultados preliminares de los métodos que se proponen en este capítulo se han presentado por el autor en los congresos internacionales [DRT06] (publicado en [DRT09]) y [DRT07].

El capítulo se ha organizado como sigue. En primer lugar se formula el problema de grupo como un problema de optimización vectorial en un espacio normado de matrices, planteando las dificultades y retos del problema. En segundo lugar se introducen técnicas de escalarización que articulan la estrategia del grupo y definen el concepto de optimalidad. Por último se proponen algoritmos de resolución de los problemas planteados con datos intervalares, para las métricas y normas

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

matriciales más usuales.

4.2. Formulación general del problema

4.2.1. Problema de optimización vectorial en un espacio métrico de matrices

Sea $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ con $n \geq 2$ un conjunto finito de alternativas y E_1, E_2, \dots, E_m , un conjunto de expertos que expresan sus preferencias mediante matrices de comparación por pares M^1, M^2, \dots, M^m , con datos intervalares. Se trata de encontrar un vector de prioridad $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$ ($w_i > 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1$) que sea el que mejor refleje la información de preferencias expresadas individualmente por los expertos. Siguiendo el planteamiento dado al problema en el caso de un experto ($m = 1$), (Cap. 2, Sección 2.3), este problema se puede formular en los siguientes términos.

Dadas las matrices de de comparación por pares $M^k, k = 1, \dots, m$, se trata de encontrar una matriz $n \times n$ positiva W tal que:

- W sea consistente, y
- W esté lo más próxima posible a las matrices $M^k, k = 1, \dots, m$

Atendiendo al enfoque de aproximación de matrices planteado en el capítulo 2 para abordar el problema para el caso $m = 1$, se introduce una norma matricial $\|\cdot\|$, que induce la métrica de distancia a utilizar en el espacio métrico de las matrices $n \times n$. En este espacio, el problema se plantea en términos de encontrar una matriz consistente ideal, que sea la que más satisface al grupo, en el sentido de que está "lo más próxima posible" de la información de preferencias del conjunto de matrices de comparación por pares. Formalmente, el problema a plantear es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (\|M^1 - W\|, \dots, \|M^m - W\|) \\ \text{sujeto a} \quad & W \in \mathcal{C}_{n \times n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

siendo $\mathcal{C}_{n \times n}$ el subconjunto de matrices $n \times n$ consistentes. Esto es,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (\|(m_{ij}^1 - w_{ij})_{i,j=1}^n\|, \dots, \|(m_{ij}^m - w_{ij})_{i,j=1}^n\|) \\ \text{sujeto a} \quad & w_{ij} > 0 \\ & w_{ij} \cdot w_{jk} = w_{ik} \\ & \forall i, j, k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se hace notar que en la formulación anterior se abordan simultáneamente los problemas de consistencia y de grupo, al buscar una solución W de consenso y consistente, que minimice el desacuerdo de los expertos con respecto a la matriz W .

En el escenario de problemas de decisión de grupo que estamos considerando, se interpreta que cada experto contribuye con una función objetivo $f_k(w) =$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

$\|M^k - W\|$ $k = 1, \dots, m$. Esta función se puede reescribir en términos de vectores de prioridad. En el capítulo 2 (Sección 2.3) se vio que para cada matriz $n \times n$ consistente W existe un vector positivo $w \in \mathbb{R}_+^n$ normalizado ($\sum_{i=1}^n w_i = 1$) tal que $W = D_w E (D_w)^{-1}$, donde $E = (e_{ij})$ con $e_{ij} = 1$, $1 \leq i, j \leq n$ y $D_w = (d_{ijw})$ es una matriz diagonal con

$$d_{ijw} = \begin{cases} w_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Entonces,

$$\|M^k - W\| = \|M - D_w E (D_w)^{-1}\| =: f_k(w) \quad (4.5)$$

para algún vector $w = (w_i)^t$ de componentes positivas, tal como se definió en (2.13). Por lo tanto, el reto es encontrar un vector de prioridad que optimice simultáneamente cada una de las funciones objetivo $f_k(w)$, $k = 1, \dots, m$. Esto nos lleva a plantear el problema de optimización vectorial

$$(PG) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & F(w) \\ \text{sujeto a} & w \in \mathcal{F} \end{array} \quad (4.6)$$

donde $F(w) = (f_1(w), \dots, f_m(w))^t$, $m \geq 2$, $f_k(w) = \|M^k - D_w E (D_w)^{-1}\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$ y $\mathcal{F} = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i > 0, \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ es el conjunto factible de vectores de prioridad.

En adelante nos referiremos al problema general (4.6) como (PG).

Este tipo de problemas, con diferentes matices, también son referidos en la literatura como problemas de optimización multicriterio o multiobjetivo ([EW05], [BV04]). El objetivo ideal es obtener una solución que optimice simultáneamente todos los objetivos en (4.6). En general, en problemas reales, los objetivos están en conflicto entre sí, por lo que no existe una solución que minimice todas las funciones objetivo. Esto es, w^* es un vector de pesos tal que la matriz consistente de razones $W^* = (w_i^*/w_j^*)$ generada a partir de dicho vector, dista lo menos posible de la información de preferencias dada por todos los miembros del grupo. Para interpretar el problema de optimización (4.6), consideramos el conjunto de imágenes de los elementos del conjunto factible:

$$\mathcal{I} = \{F(w) : w \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (4.7)$$

que denominaremos conjunto de imágenes objetivo alcanzables.

En el problema (PG), "Min" se entiende como encontrar las salidas óptimas en el conjunto de imágenes \mathcal{I} y sus preimágenes en \mathcal{F} , pero la relación de orden usual entre los elementos de \mathcal{I}

$$y \leq \tilde{y} \Leftrightarrow y_i \leq \tilde{y}_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (4.8)$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

con $y = (y_1, \dots, y_m)^t, \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)^t \in \mathbb{R}^m$, es un orden parcial en \mathbb{R}^m .

En [Cve00] se presenta la siguiente definición, para los órdenes parcial y total.

Definición 5 *Una relación binaria R es un orden parcial en un dominio \mathcal{D} si y sólo si satisface las siguientes propiedades:*

- reflexividad: $R(x, x), \forall x \in \mathcal{D}$
- antisimetría: Si $R(x, y)$ y $R(y, x)$ entonces $x = y, \forall x, y \in \mathcal{D}$
- transitividad: Si $R(x, y)$ y $R(y, z)$ entonces $R(x, z), \forall x, y, z \in \mathcal{D}$

Una relación binaria R' es un orden total en un dominio \mathcal{D} si

1. *Es un orden parcial, y*
2. *$R'(x, y)$ o $R'(y, x), \forall x, y \in \mathcal{D}$*

A partir de las definiciones anteriores se visualiza el problema de la optimización vectorial. Así, dados dos elementos factibles w y $\tilde{w} \in \mathcal{F}$, las correspondientes imágenes $F(w)$ y $F(\tilde{w})$ pueden ser no comparables, esto es, no se puede determinar cuál es mejor. Esto lleva a considerar distintas situaciones y a considerar los conceptos de *dominancia* y *eficiencia*.

Primero consideraremos un caso especial, en el que está claro el significado del problema de optimización vectorial (PG). Supongamos que existe un elemento $w^* \in \mathcal{F}$ tal que

$$F(w^*) \leq F(w), \quad \forall w \in \mathcal{F}, \quad (4.9)$$

esto es,

$$f_k(w^*) \leq f_k(w), \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad \forall w \in \mathcal{F} \quad (4.10)$$

En este caso se dice que w^* es la solución optimal o ideal ([BV04],[EW05]) del problema (PG).

Interpretando esta caso, el problema de decisión que consideramos correspondería a la situación en la que todos los expertos están de acuerdo en que w^* es la mejor solución. Esto es, w^* minimiza todas las funciones objetivo (4.5).

En general, en los problemas de optimización vectorial no existe el óptimo ideal. En el contexto de los problemas de decisión en estudio, la información proporcionada por los distintos expertos, atendiendo - entre otras razones - a su formación y diferencias de intereses y criterios, será de naturaleza diversa y posiblemente incompatible. Por ello, en general, no todas las funciones objetivo $f_k(w), k = 1, \dots, m$, alcanzarán el mínimo en el mismo elemento del conjunto de soluciones admisibles. En general, en el problema de optimización vectorial (4.6) no existe el óptimo ideal. En estos casos, en los que el conjunto de imágenes objetivo alcanzables \mathcal{I} no tiene un elemento mínimo, se consideran los "*elementos minimales*" de \mathcal{I} , que se introducen a continuación.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

Definición 6 ([EW05],[BV04],[BCC06]) Un elemento $y = (y_1, \dots, y_m)^t \in \mathcal{I}$ se denomina imagen no dominada o imagen Pareto-optimal del problema (PG), si y es un elemento minimal en \mathcal{I} , en el siguiente sentido.

$$f_k(x) \geq y_k, \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad \forall x \in \mathcal{F}, \quad (4.11)$$

y además, $\exists l \in \{1, \dots, m\}$ tal que $f_l(x) = y_l$.

Un problema de optimización vectorial puede tener varias imágenes Pareto-optimales y éstas están en el borde del conjunto \mathcal{I} de imágenes alcanzables. Las preimágenes de las imágenes no dominadas se denominan *soluciones eficientes Pareto-optimales* del problema.

Definición 7 ([EW05],[BV04],[BCC06]) Un elemento w^* es Pareto-optimal o solución eficiente para el problema (PG) si w^* está en el conjunto factible ($w^* \in \mathcal{F}$) y si $\exists w \in \mathcal{F}$ tal que

$$F(w) \leq F(w^*) \quad (4.12)$$

entonces $F(w) = F(w^*)$.

En [EW05],[BV04],[CZ73] y [BS02], se refieren detalladamente propiedades y resultados teóricos relativos a las soluciones eficientes de un problema de optimización vectorial. Nuestro objetivo es proporcionar métodos efectivos de cálculo de soluciones eficientes de (PG) y su interpretación en el contexto de problemas de decisión de grupo.

Consideremos ahora la función vectorial del problema (PG) planteado

$$F(w) = (f_1(w), \dots, f_m(w)), \quad (4.13)$$

con $f_k(w) = \|M - D_w E D_w^{-1}\|$. Estas funciones son no lineales y no convexas. Atendiendo a los enfoques seguidos en el capítulo 2 (Sección 2.3), sustituiremos la función objetivo $F(w)$ por las funciones objetivo más manejables, $\tilde{F}(w)$ y $G(v)$, que se describen a continuación.

Siguiendo la estrategia planteada en la Sección 2.4.2 de transformar logarítmicamente punto a punto los datos del problema, la función objetivo parcial $f_k(w) = \|M^k - (D_w)^{-1} E D_w\|$ se sustituirá por la función objetivo equivalente

$$g_k(w) = \|B^k - L_v + (L_v)'\| \quad (4.14)$$

con $B^k = (b_{ij}^k)$, $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$.

De esta forma, se plantea el problema de optimización vectorial, que denominaremos *problema de optimización vectorial logarítmico (LPOV)*_{||}

$$\begin{aligned} \min G(w) &= \min \left(\|B^1 - L_v + L_v^T\|, \dots, \|B^m - L_v + L_v^T\| \right) \\ \text{con} \quad v &\in \tilde{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

siendo $\tilde{\mathcal{F}} = \{v \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n v_i = 0\}$.

Por otro lado, procediendo con cada función objetivo parcial $f_k(w)$ como se hizo en (2.27) y (2.29), consideremos por una parte la función objetivo

$$\tilde{F}(w) = (\tilde{f}_1(w), \dots, \tilde{f}_m(w)), \quad (4.16)$$

con $\tilde{f}_k(w) = \|M^k D_w - D_w E\|$.

De esta forma se plantea el problema de optimización vectorial que denominaremos *problema de optimización vectorial sub-optimal (WPOV)*_{|||}:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (\|M^1 D_w - D_w E\|, \dots, \|M^m D_w - D_w E\|) \\ \text{sujeto a} & w \in \mathcal{F} \end{array} \quad (4.17)$$

siendo $\mathcal{F} = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

4.2.2. Problema de optimización escalar. Marco analítico

En la sección anterior se planteaba formalmente el problema general como un problema de optimización vectorial (4.6):

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & F(w) \\ \text{sujeto a} & w \in \mathcal{F} \end{array} \quad (4.18)$$

Pese a estar perfectamente definida la función vectorial objetivo $F(w)$ y el conjunto de soluciones factibles \mathcal{F} , se debe precisar el concepto de optimización vectorial, dado que no es trivial determinar la "solución óptima". En general se tiene que no hay un criterio de optimalidad, sino un conjunto de objetivos múltiples e imprecisos, en conflicto. Cualquier interpretación y significado que se le dé al problema requiere la incorporación de estrategias para alcanzar soluciones que cumplan con los criterios de optimización definidos. En este caso, el trabajo se centrará en métodos con una clara interpretación y significado en el problema de grupo que nos ocupa. En general, los problemas de optimización vectorial que se plantean, raramente tienen una solución óptima (o de consenso unánime), en el sentido de que simultáneamente minimiza todas las funciones objetivo individuales $f_k(w)$, para $k = 1, \dots, m$.

Las decisiones de grupo han tenido una importancia creciente en el ámbito de la investigación y desarrollo de algoritmos y métodos de apoyo a la decisión, dado que se presentan en múltiples dominios de gran relevancia social, económica, tecnológica y política, donde muchas veces, un grupo de expertos necesita tomar una decisión que represente las opiniones individuales y cuente - a la vez - con el acuerdo de cada uno de ellos [Che05]. Entonces, el proceso de llegar a una decisión colectiva a partir de preferencias individuales determinadas por opiniones, enfoques, actitudes y predisposiciones que posiblemente estarán enfrentadas entre sí, lleva asociado el grado de complejidad relativo al problema de optimización vectorial.

Así, en general en presencia de varios expertos, se plantean situaciones de conflicto las que, a modo de ejemplo, es frecuente encontrar en decisiones políticas, medioambientales, económicas, de gestión de recursos humanos o de asignación presupuestaria sólo por mencionar algunas. Se trata pues, de definir qué entendemos por solución de grupo. Siguiendo el análisis del problema de optimización vectorial de la sección anterior, una propiedad comúnmente considerada como necesaria para cualquier solución candidata w es que sea eficiente o Pareto-optimal (Def. 7), o lo que es lo mismo, que $F(w)$ sea imagen Pareto-optimal (Def. 6). Desafortunadamente, no es fácil obtener la descripción exacta del conjunto Pareto y en todo caso, atendiendo a los problemas de decisión de grupo que nos ocupan, el interés es obtener finalmente un vector de prioridad que permita ordenar las alternativas consideradas.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

En este contexto nuestro objetivo es proporcionar métodos que exploten y sintetizen la información diversa e imprecisa proporcionada por distintos expertos y proporcionar soluciones eficientes al problema, con una clara interpretación en el problema de decisión de grupo que nos ocupa. Así, la idea es aplicar un enfoque que combine la información proveniente de distintas fuentes, de un modo consistente, apuntando a la búsqueda de un "prototipo ideal" consistente W .

El proceso de agregación de preferencias de grupo, debe cumplir con un conjunto de propiedades, las que han sido propuestas mediante una axiomática, ya desde el trabajo de Arrow en 1951 ([Arr51]), en el que se establece la imposibilidad de consistencia simultánea de todos los axiomas formulados por el autor. No obstante, a partir del trabajo de Arrow, la literatura especializada acepta dicha axiomática con ligeras variaciones dependiendo del enfoque metodológico a utilizar para la obtención del vector de prioridades de grupo. Así, los axiomas más comúnmente empleados y que resumen el desarrollo de este conjunto de propiedades, propuestos, entre otros, en [Yu73], [Fic86], [RG94] y [Cve00], son los siguientes.

Axioma 1: Definición completa del dominio. Existen al menos dos integrantes en el grupo que toma la decisión, hay al menos tres alternativas en el conjunto de opciones y el espacio de posibles vectores de preferencias de los individuos que componen el grupo, debe incluir todas las alternativas posibles. En otras palabras, no debe ser imposible proporcionar un vector de prioridad de grupo para cualquier subconjunto posible de preferencias individuales.

Axioma 2: Optimalidad - Pareto. En general, la aplicación del principio de Pareto se puede resumir en términos de la conservación de la unanimidad de preferencias individuales. Así, si la alternativa x_i es preferida a la alternativa x_j por todos los expertos (en nuestro caso, $m_{ij}^k > 1, \forall k = 1, \dots, m$), entonces la solución de grupo debiera reflejar esa preferencia, esto es $w_i > w_j$.

Axioma 3: Independencia de alternativas irrelevantes. Si para todos los expertos del grupo, al eliminar una alternativa no se altera la estructura de preferencias individual, el vector correspondiente a la solución agregada del grupo debiera permanecer sin variación al eliminar dicha alternativa irrelevante.

Axioma 4: Ausencia de dictadura. No puede existir entre los expertos, alguno cuya estructura de preferencias se imponga siempre como preferencia agregada del grupo, en desmedro de otras (distintas) preferencias individuales.

Los métodos que se van a proponer, están basados en la transformación de la función objetivo vectorial $F(w)$ en una función objetivo escalar que concilie "lo mejor posible" (de alguna forma que se precisará), los múltiples objetivos en conflicto, que denominaremos *función de consenso*.

En general, el proceso de transformación de una función vectorial en una función escalar es conocido como escalarización. Los métodos de escalarización, como enfoque para abordar la resolución de problemas de optimización multi-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

objetivo (MOP) son descritos en [EW05].

Consideramos el conjunto \mathcal{I} de vectores de \mathbb{R}^m , correspondiente al conjunto de imágenes mediante la función F (conjunto de soluciones factibles) del problema, definido en (4.7).

$$\mathcal{I} = \left\{ F(w) : w > 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^m. \quad (4.19)$$

La idea es buscar soluciones "optimales" del problema (4.6) que minimicen $F(w)$ en algún sentido.

Por construcción, $F(w) \geq 0, \forall w \in \mathcal{F}$ (0 simboliza el vector nulo en \mathbb{R}^m), además, $F(w) = 0$ si y sólo si hay acuerdo unánime entre todos los expertos y las matrices M^k , $k = 1, \dots, m$, son consistentes (Teorema 2.2.2 y Ecuación (2.11)), en el supuesto de que dichas matrices sean de datos numéricos puntuales. El problema se puede interpretar como que el objetivo ideal en el conjunto de imágenes el vector 0. Los métodos que se proponen buscan encontrar $w \in \mathcal{F}$ tal que $F(w)$ esté "lo más próximo posible" a 0 (vector nulo de \mathbb{R}^m). Para medir esta proximidad en \mathbb{R}^m , se consideran las métricas l_p , $1 \leq p \leq \infty$, con pesos α_i

$$\|x\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^m \alpha_i |x_i|^p)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, \dots, m} \{\alpha_i |x_i|\} & \text{si } p = \infty, \end{cases} \quad (4.20)$$

siendo $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)^t$ un vector de pesos con $\alpha_i > 0 \forall i$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Esta es una familia de métricas usuales en \mathbb{R}^m y tiene una clara interpretación en el contexto del problema de grupo abordado, que se explicará más adelante.

Así, el problema de optimización escalar que se considera es: Encontrar $w \in \mathcal{F}$ tal que

$$\begin{aligned} \min_{w \in \mathcal{F}} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i |f_i(w)|^p \right) &= \min_{w \in \mathcal{F}} \|\Lambda \circ F(w)\|_p^p & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \min_{w \in \mathcal{F}} \left(\max_{i=1, \dots, m} \alpha_i |f_i(w)| \right) &= \min_{w \in \mathcal{F}} \|\Lambda \circ F(w)\|_\infty & \text{si } p = \infty \end{aligned} \quad (4.21)$$

con

$$\begin{aligned} f_i(w) &= \|M^i - W\|, \quad i = 1, \dots, m \\ F(w) &= (f_1(w), \dots, f_m(w))^t \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde $\Lambda = (\alpha_1^{1/p}, \dots, \alpha_m^{1/p})^t$, se observa que α_i es el "poder de votación" relativo del miembro del grupo E_i . Si todos los miembros del grupo tienen el mismo poder de votación, $\alpha_i = \frac{1}{m}$ y puede eliminarse en la expresión del problema. La notación \circ se refiere al producto de Hadamard de dos matrices de igual dimensión. Así, si

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

$A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices de igual dimensión, $A \circ B$ es una matriz $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

Se demuestra que toda solución optimal del problema planteado (4.22) es solución Pareto-optimal del problema de optimización vectorial (4.6) ([BV04], [EW05]). En estas referencias se incluyen resultados teóricos relativos a las soluciones de los problemas considerados. Las soluciones optimales de (4.22) se suelen denominar *soluciones compromiso*.

Se plantean varias observaciones acerca de los problemas de optimización formulados en la Ec. (4.21).

- El problema de optimización descrito en la Ec. (4.21) es un problema de optimización escalar, en el sentido que la función objetivo de dicho problema $\|\Lambda \circ F(w)\|_p$ es una función de valores reales. Estos métodos se podrían encuadrar en los denominados métodos de escalarización basados en distancias ([EW05], [CZ73]). El caso $p = 1$ incluye la aproximación al enfoque clásico, ampliamente estudiado ([BV04]), en el que la función objetivo es la suma, con los correspondientes pesos asignados, de las funciones objetivo $f_k(w)$:

$$\min_{w \in \mathcal{F}} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_k f_k(w) \right). \quad (4.23)$$

El caso $p = \infty$ corresponde al uso de la norma vectorial ∞ , también denominada *norma de Chebyshev o Tchebycheff*. En él, se minimiza la máxima desviación:

$$\min_{w \in \mathcal{F}} \left(\max_{i=1, \dots, m} \{ \alpha_k f_k(w) \} \right). \quad (4.24)$$

- En el problema de optimización planteado (4.21) se agregan las funciones objetivo individuales, $f_k(w)$, esto es, las desviaciones de las matrices de comparación por pares dadas por los expertos de una matriz consistente ideal común W , mediante el uso de métricas l_p . Se buscan soluciones que maximicen la satisfacción del grupo, en el sentido de que minimicen el desacuerdo "agregado" de los expertos (con la matriz W) mediante la métrica l_p . El uso particular de la métrica p se puede interpretar en el contexto de problemas de grupo como una "asignación de peso". Las medidas modelizan la agregación de preferencias de los expertos, facilitando diferentes estrategias de grupo. La métrica p define el tipo de distancia usado en el análisis y afecta a la contribución (relativa) de las desviaciones individuales de los expertos del ideal de consenso, proporcionando diferentes modelos de decisión. Para $p = 1$, el consenso es compensatorio, en el sentido que una disminución en la distancia de M^k a W (matriz de consenso), para un experto, se compensa con el crecimiento equivalente para otro experto, mientras

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

que para $p = \infty$, las distancias no son compensadas, ya que se elige la menor de las desviaciones máximas del ideal [BTSCF05].

El valor α_i cuantifica el peso que se asigna a priori al experto E_i ; al incrementar el valor de α_i , se incrementa el efecto de la desviación debida al experto i en la función objetivo del problema de optimización (4.21).

- El enfoque de escalarización adoptado también se podría interpretar en términos de una función logro o de utilidad ([EW05]) dada por $\|\Lambda \circ F(w)\|_p$.
- Por otra parte, se hace notar que en el problema (4.21) se aborda el problema de la inconsistencia y el problema de grupo simultáneamente. Para medir las desviaciones de inconsistencia se utiliza una norma matricial $\|\cdot\|$ y la agregación de las desviaciones de los distintos expertos se materializa vía el uso de normas vectoriales l_p con peso.
- El problema (4.21) no requiere que las matrices M^k de partida sean recíprocas.
- Adicionalmente, este enfoque proporciona indicadores del nivel de desacuerdo del grupo y de los expertos con la solución de grupo obtenida. Si w es el vector de prioridades del grupo, $\|F(w)\|_p = \|(M^k - (w_i/w_j))_{k=1\dots m}\|_p$ mide el grado de desacuerdo del grupo con la solución w . Paralelamente, $f_k(w) = \|(M^k - (w_i/w_j))\|$ proporciona una estimación del desacuerdo del experto k . Estas medidas se podrían haber definido sobre errores relativos, trabajando por ejemplo con la norma de la matriz de elementos $|m_{ij} - (w_i/w_j)|/m_{ij}$. De especial interés son las medidas derivadas para los valores de $p = 1, 2, \infty$ que conducen, respectivamente, a la suma, la media y al máximo de las desviaciones de la solución respecto de la información de preferencias de los expertos.

4.3. Formulación GP general. Algoritmos de cálculo

4.3.1. Resolución del problema de grupo con datos puntuales

Considerando los problemas de optimización escalares (4.21) y (4.22) planteados en la sección anterior, se aborda en esta sección las formas de resolución efectiva, mediante la utilización de formulaciones GP. Para esto se aplicarán en el modelo las métricas más usuales.

En primer lugar, al considerar la aproximación log-consistente del problema en estudio, se planteó en la Ec. (4.15) el problema de optimización vectorial logarítmico ($LPOV_{\|\cdot\|}$). En este problema, cada función objetivo parcial representa

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

el problema de aproximación para un experto. Aplicando la metodología de es-
 calarización, basada en la utilización de la métricas l_p , para la agregación de las
 distancias desde las matrices del grupo de expertos a la matriz consistente "más
 próxima", se planteó en la sección anterior, el correspondiente problema de opti-
 mización escalar (4.21). Así, el problema de optimización escalar log-consistente
 $(LPO)_{p||}$, queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \left(\sum_{k=1}^m \left(\alpha_k \|B^k - L_v + L_v^T\| \right)^p \right)^{1/p} \quad & 1 \leq p < \infty \\ \min \max_{k=1 \dots m} \left(\alpha_k \|B^k - L_v + L_v^T\| \right) \quad & p = \infty \end{aligned} \quad (4.25)$$

Análogamente, en la Ec. (4.17) se planteó el problema sub-optimal conside-
 rando la aproximación consistente. Al aplicar en este caso la metodología de es-
 calarización basada en la utilización de la métricas l_p para la agregación de las
 distancias, se formula el problema de optimización escalar sub-optimal $(WPO)_{p||}$
 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \left(\sum_{k=1}^m \left(\alpha_k \|M^k D_w - D_w E\| \right)^p \right)^{1/p} \quad & 1 \leq p < \infty \\ \min \max_{k=1 \dots m} \left(\alpha_k \|M^k D_w - D_w E\| \right) \quad & p = \infty \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para el planteamiento de la formulación GP del problema de optimización
 escalar log-consistente $(LPO)_{p||}$ (4.25), se introducen las variables de desviación
 N_v^k y P^k de acuerdo al siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} N^k &= \frac{1}{2} \left[\|B^k - L_v + L_v^T\| + (B^k - L_v + L_v^T) \right] \\ P^k &= \frac{1}{2} \left[\|B^k - L_v + L_v^T\| - (B^k - L_v + L_v^T) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Considerando el cambio de variables anterior, la formulación GP del problema
 de optimización escalar log-consistente $(LGOP)$ queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (LGPO)_{p||} \quad & \min \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \|N^k + P^k\|^p \right)^{1/p} \\ \text{sujeto a} \quad & v \in \tilde{\mathcal{F}} \\ & B^k - L_v + L_v^T - N^k + P^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\ & v > 0, N^k \geq 0, P^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.28)$$

si $1 \leq p < \infty$, siendo $\tilde{\mathcal{F}} = \{v \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n v_i = 0\}$ y $\alpha_k > 0$ peso asignado a priori al
 experto E_k , con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

Si $p = \infty$ el problema de optimización $(LGPO)_{p|||}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 (LGPO)_{\infty|||} \quad & \text{mín } d \\
 \text{sujeto a} \quad & v \in \tilde{\mathcal{F}} \\
 & \alpha_k \|(N_l^k + P^k)\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & B^k - L_v + L_v^T - N_l^k + P^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & v > 0, N_l^k \geq 0, P^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

donde d es la desviación máxima.

Para el caso de la formulación GP del problema de optimización escalar sub-optimal $(WPO)_{p|||}$ (4.26), se introducen las variables de desviación N^k y P^k de acuerdo al siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}
 N^k &= \frac{1}{2} \left[|M^k D_w - D_w E| + (M^k D_w - D_w E) \right] \\
 P^k &= \frac{1}{2} \left[|M^k D_w - D_w E| - (M^k D_w - D_w E) \right]
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Considerando el cambio de variables anterior, la formulación GP del problema de optimización escalar sub-optimal $(WGPO)_{p|||}$ queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{p|||} \quad & \text{mín} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \|N^k + P^k\|^p \right)^{1/p} \\
 \text{sujeto a} \quad & w \in \mathcal{F} \\
 & M^k D_w - D_w E - N^k + P^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & w > 0, N^k \geq 0, P^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

si $1 \leq p < \infty$, siendo $\mathcal{F} = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ y $\alpha_k > 0$ peso asignado a priori al experto E_k , con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

Si $p = \infty$, el problema de optimización $(WGPO)_{p|||}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{\infty|||} \quad & \text{mín } d \\
 \text{sujeto a} \quad & w \in \mathcal{F} \\
 & \alpha_k \|(N^k + P^k)\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & M^k D_w - D_w E - N^k + P^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & w > 0, N^k \geq 0, P^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde d es la desviación máxima.

Los dos enfoques planteados, log-consistente y sub-optimal, pueden ser generalizados en cuanto a la métrica de distancia l_p mediante problemas de optimización paramétricos, en los que un parámetro λ que varía entre 0 y 1, es utilizado

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

para la construcción de una función objetivo que representa el criterio de solución compromiso como una combinación convexa entre dos criterios opuestos (métricas l_1 y l_∞).

La formulación λ -extendida para el problema de optimización escalar log-consistente es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 (LXPO)_{|||} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \|N^k + P^k\| + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & v \in \tilde{\mathcal{F}} \\
 & \alpha_k \|(N_l^k + P^k)\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & B^k - L_v + L_v^T - N^k + P^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & v > 0, N^k \geq 0, P^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Del mismo modo, la formulación λ -extendida para el problema de optimización escalar sub-optimal es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 (WXPO)_{|||} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \|N^k + P^k\| + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & w \in \mathcal{F} \\
 & \alpha_k \|(N^k + P^k)\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & M^k D_w - D_w E - N^k + P^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & w > 0, N^k \geq 0, P^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Casos particulares de la formulación GP. Problema log-consistente

Se plantean a continuación, las formulaciones GP resolubles mediante la utilización de las métricas más usuales. Para la agregación de los expertos, se utiliza la métrica l_p , $p = 1, 2, \infty$ y como normas matriciales se considera la norma matricial 1, la norma de Frobenious, que se denotarán por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{Fr}$ respectivamente y las norma matriciales inducidas por normas vectoriales $\|\cdot\|_{m1}$ y $\|\cdot\|_{m\infty}$. La utilización de este conjunto de métricas permite representar un amplio espectro de estrategias de decisión.

La formulación resultante de la utilización de las métricas l_1 y $\|\cdot\|_1$ en el problema de optimización escalar log-consistente, es el siguiente problema de pro-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

gramación lineal (LP por su sigla en inglés),

$$\begin{aligned}
 (LGPO)_{1|||1} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \right) \\
 \text{sujeto a} \quad & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

La formulación del problema log-consistente utilizando las métricas l_∞ y $|||_1$ da como resultado el siguiente problema (también LP):

$$\begin{aligned}
 (LGPO)_{\infty|||1} \quad & \min d \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

A partir de los problemas log-consistentes (4.35) y (4.36) se plantea la siguiente formulación GP λ -extendida con norma matricial $|||_1$:

$$\begin{aligned}
 (LXPO)_{|||1} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

En la ecuación anterior, la formulación para cada valor de λ puede ser reducida a un problema de programación lineal. En general, las formulaciones LP pueden ser resueltas con múltiples herramientas disponibles y de amplio uso, que resuelven el problema utilizando el método simplex.

Al aplicar la métrica l_2 y la norma matricial $|||_{Fr}$ a la formulación del problema de optimización escalar log-consistente, se obtiene la función objetivo

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

$\min (\sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k)^2)^{1/2}$, equivalente al siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} (LGPO)_{2\|\cdot\|_{Fr}} = & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k)^2 \\ \text{sujeto a} \quad & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\ & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para este tipo de problemas, existe gran cantidad de procedimientos numéricos de resolución.

La formulación resultante de la utilización de las métricas l_1 y $\|\cdot\|_{m1}$ en el problema de optimización escalar log-consistente, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^m d_k \\ \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad k = 1, \dots, m \\ & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\ & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.39)$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

En la ecuación (4.39), la restricción $\max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ para $i = 1, \dots, n$, por lo que la formulación LP de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (LGPO)_{1\|\cdot\|_{m1}} \quad & \min \sum_{k=1}^m d_k \\ \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\ & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\ & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\ & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.40)$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

La formulación del problema log-consistente utilizando las métricas l_∞ y $\|\cdot\|_{m1}$ da como resultado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (LGPO)_{\infty\|\cdot\|_{m1}} \quad & \text{mín } d \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

A partir de los problemas log-consistentes (4.39) y (4.41) se plantea la siguiente formulación GP λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_{m1}$:

$$\begin{aligned}
 (LXPO)_{\|\cdot\|_{m1}} \quad & \text{mín } \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Al utilizar las métricas l_1 y $\|\cdot\|_{m\infty}$ en el problema de optimización escalar log-consistente, se obtiene la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 \text{mín } & \sum_{k=1}^m d_k \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad k = 1, \dots, m \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

En la ecuación (4.43), la restricción $\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ para $i = 1, \dots, n$, por lo que la formulación *LP* de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (LGPO)_{1||\|\infty} \quad & \min \sum_{k=1}^m d_k \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

La formulación del problema log-consistente utilizando las métricas l_∞ y $||\|\infty$ da como resultado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (LGPO)_{\infty||\|\infty} \quad & \min d \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

en que $b_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y la solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

A partir de los problemas log-consistentes (4.43) y (4.45) se plantea la siguiente formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $||\|\infty$:

$$\begin{aligned}
 (LXPO)_{||\|\infty} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & b_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

Casos particulares de la formulación GP. Problema sub-optimal

Se plantean a continuación, las formulaciones GP correspondientes a la utilización de las métricas más usuales en el problema optimización escalar sub-optimal. Para la agregación de los expertos, se utiliza la métrica l_p , $p = 1, 2, \infty$ y como normas matriciales se consideran las normas matriciales $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{Fr}$ y las norma matriciales inducidas por normas vectoriales $\|\cdot\|_{m1}$ y $\|\cdot\|_{m\infty}$.

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{1\|\cdot\|_1} \quad & \text{mín} \sum_{k=1}^m \alpha_k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \right) \\
 \text{sujeto a} \quad & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

La formulación del problema sub-optimal utilizando las métricas l_∞ y $\|\cdot\|_1$ da como resultado el siguiente problema LP:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{\infty\|\cdot\|_1} \quad & \text{mín } d \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Del mismo modo, a partir de los problemas sub-optimales (4.47) y (4.48) se

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

plantea la siguiente formulación GP λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_1$:

$$\begin{aligned}
 (WXPO)_{\|\cdot\|_1} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Al aplicar la métrica l_2 y la norma matricial $\|\cdot\|_{Fr}$ a la formulación del problema de optimización escalar sub-optimal, se obtiene la función objetivo $\min(\sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k)^2)^{1/2}$, equivalente al siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{2\|\cdot\|_{Fr}} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k)^2 \\
 \text{sujeto a} \quad & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

La formulación resultante de la utilización de las métricas l_1 y $\|\cdot\|_{m1}$ en el problema de optimización escalar sub-optimal, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \quad & \min \sum_{k=1}^m d_k \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

En la ecuación (4.52), la restricción $\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ para $j = 1, \dots, n$, por lo que la formulación *LP* de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{1||\|_{m1}} \quad & \min \sum_{k=1}^m d_k & (4.52) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k & j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 & i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

La formulación del problema sub-optimal utilizando las métricas l_∞ y $||\|_{m1}$ da como resultado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{\infty||\|_{m1}} \quad & \min d & (4.53) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d & k = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 & i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

A partir de los problemas sub-optimales (4.52) y (4.53) se plantea la siguiente

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_{m1}$:

$$\begin{aligned}
 (WXPO)_{\|\cdot\|_{m1}} \quad & \text{mín} \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{i=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Un problema análogo es presentado en [GPR04] y en [GPR07], donde se propone una metodología de dos pasos. En [GPR99] se presenta una formulación *GP* extendida en el contexto de agregación de rankings.

Al utilizar las métricas l_1 y $\|\cdot\|_{m\infty}$ en el problema de optimización escalar sub-optimal, se obtiene la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{k=1}^m d_k \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

En la ecuación (4.55), la restricción $\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d$ para $i = 1, \dots, n$, por lo que la formulación *LP*

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{1||\|\infty} \quad & \text{mín} \sum_{k=1}^m d_k & (4.56) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k & i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 & i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

La formulación del problema sub-optimal utilizando las métricas l_∞ y $||\|\infty$ da como resultado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (WGPO)_{\infty||\|\infty} \quad & \text{mín} d & (4.57) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d & k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 & i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 & i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

A partir de los problemas sub-optimales (4.55) y (4.57) se plantea la siguiente

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_{m\infty}$:

$$\begin{aligned}
 (WXPO)_{\|\cdot\|_{m\infty}} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{j=1}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \leq d \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & m_{ij}^k w_j - w_i - n_{ij}^k + p_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & n_{ij}^k, p_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

4.3.2. Resolución del problema de grupo con datos intervalares

En la sección anterior se han proporcionado procedimientos para la resolución de los problemas de optimización resultantes de abordar simultáneamente los problemas de consistencia y de decisión de grupo, suponiendo que se trabajaba con datos puntuales. Sin embargo, atendiendo a la complejidad e incertidumbre presentes en problemas de decisión reales, al manejo de información difícil de cuantificar, al uso de escalas numéricas para cuantificar expresiones lingüísticas, etc., es de gran interés permitir que los expertos proporcionen juicios (preferencias) imprecisos.

Un modelo para permitir la vaguedad e imprecisión en las preferencias es trabajar con intervalos numéricos para representar información de preferencias difícil de expresar mediante un valor numérico. Varias son las razones que justifican el uso de datos de preferencias intervalares ([BJ00]): (a) estudios experimentales acerca de la relación entre las palabras y las probabilidades sugieren que las expresiones verbales pueden ser modeladas más efectivamente usando intervalos de valores que al usar valores puntuales; (b) la utilización de estimaciones de preferencias intervalares por parte de los expertos proporciona al grupo un rango más amplio de valores que el rango proporcionado por las estimaciones puntuales, y (c) el uso de valores intervalares por parte de los expertos, aumenta la posibilidad de dar con un "juicio de consenso" del grupo.

En general, los modelos tradicionales trabajan con valores numéricos puntuales. En el contexto del AHP, en [SV87] y [BTSCF05] se proponen juicios intervalares como una forma de modelar la imprecisión y trabajar con ellos mediante

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

una simulación Monte Carlo, para el caso de un experto. La estrategia es generar en primer lugar, muestras de matrices de comparación por pares aleatorias con valores en los intervalos prefijados. En segundo lugar, calcular los vectores de prioridad mediante el método del autovector principal de cada matriz y proponer como vector de prioridad el promedio de dichos vectores. Esta técnica, como ya señalan los autores, puede ser muy ineficiente computacionalmente, además de la dificultad de determinar el tipo de distribución para efectuar la simulación.

Otros trabajos que consideran el uso de datos intervalares serán referidos a lo largo de la sección, relacionándolos con los métodos que se proponen.

Otra estrategia para representar preferencias imprecisas es utilizar conjuntos fuzzy. Esta línea de estudio no se considera en este trabajo y está pendiente de ser abordada en futuras investigaciones.

Se considera que cada experto E_k expresa sus preferencias acerca de las alternativas, vía una matriz de comparación por pares intervalar M^k :

$$M^k = \left(\left[\underline{m}_{ij}^k, \overline{m}_{ij}^k \right] \right) = \begin{pmatrix} \left[\underline{m}_{11}^k, \overline{m}_{11}^k \right] & \left[\underline{m}_{12}^k, \overline{m}_{12}^k \right] & \cdots & \left[\underline{m}_{1n}^k, \overline{m}_{1n}^k \right] \\ \left[\underline{m}_{21}^k, \overline{m}_{21}^k \right] & \left[\underline{m}_{22}^k, \overline{m}_{22}^k \right] & \cdots & \left[\underline{m}_{2n}^k, \overline{m}_{2n}^k \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\underline{m}_{n1}^k, \overline{m}_{n1}^k \right] & \left[\underline{m}_{n2}^k, \overline{m}_{n2}^k \right] & \cdots & \left[\underline{m}_{nn}^k, \overline{m}_{nn}^k \right] \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

con $0 < \underline{m}_{ij}^k \leq \overline{m}_{ij}^k$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Para simplificar la notación, en adelante la matriz de juicios intervalar dada por el experto k , se denotará por M^k . En el contexto de uso quedará implícito si el dato es intervalar o puntual. Se hace notar que un dato puntual es un caso particular de un dato intervalar $\left[\underline{m}_{ij}^k, \overline{m}_{ij}^k \right]$, en el que los extremos coinciden, $\underline{m}_{ij}^k = \overline{m}_{ij}^k$.

El elemento (i, j) de la matriz expresa la intensidad de preferencia entre la alternativa i y la alternativa j , en el sentido que juzga que la alternativa i es entre \underline{m}_{ij}^k y \overline{m}_{ij}^k más importante que la alternativa j .

La matriz de datos intervalares M (4.59) es recíproca si:

$$\underline{m}_{ji}^k = \frac{1}{\overline{m}_{ij}^k} = \left[\frac{1}{\overline{m}_{ij}^k}, \frac{1}{\underline{m}_{ij}^k} \right], \quad (4.60)$$

utilizando aritmética intervalar ([AH83]). Por lo anterior, si la matriz es recíproca, el experto juzgará que la alternativa j es entre $1/\overline{m}_{ij}^k$ y $1/\underline{m}_{ij}^k$ más importante que la alternativa i .

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

Al trabajar con matrices de datos intervalares, dos matrices puntuales de referencia serán las que contengan los valores extremos de los intervalos, que denotaremos por:

$$\underline{M}^k = (\underline{m}_{ij}^k), \quad \overline{M}^k = (\overline{m}_{ij}^k) \quad (4.61)$$

Por tanto, se abordará el problema de decisión de grupo planteado con datos intervalares, tomando como punto de partida los problemas *log-consistente* (4.25) y *sub-optimal* (4.26) de la sección anterior, asumiendo:

$$\underline{m}_{ij}^k \leq m_{ij}^k \leq \overline{m}_{ij}^k \quad (4.62)$$

Consideremos en primer lugar el problema log-consistente. En este caso, para analizar las posibles desviaciones de los datos, consideramos para cada i, j, k :

$$r_{ij}^k = |b_{ij}^k - v_i + v_j| \quad (4.63)$$

con $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k \leq b_{ij}^k \leq \log \overline{m}_{ij}^k = \overline{b}_{ij}^k$. Utilizando aritmética intervalar ([AH83]) se puede escribir:

$$\begin{aligned} & \left| \left[\underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j, \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right] \right| = \\ & \begin{cases} \left[\underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j, \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right] & \text{si } \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \geq 0 \\ \left[0, \min \left\{ \left| \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right|, \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right\} \right] & \text{si } \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j < 0 < \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \\ \left[v_i - \overline{b}_{ij}^k - v_j, v_i - \underline{b}_{ij}^k - v_j \right] & \text{si } \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Siguiendo la estrategia planteada en la sección anterior, a partir de la desviación intervalar r_{ij}^k (4.63), se definen las variables que representan las desviaciones negativa y positiva para cada uno de los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned} \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j &= \underline{n}_{ij}^k - \underline{p}_{ij}^k \\ \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j &= \overline{n}_{ij}^k - \overline{p}_{ij}^k \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.65)$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

con

$$\begin{aligned}\underline{n}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right| + \left(\underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right) \right] \\ \underline{p}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right| - \left(\underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right) \right] \\ \overline{n}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right| + \left(\overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right) \right] \\ \overline{p}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right| - \left(\overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j \right) \right] \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{4.66}$$

Las variables \underline{n}_{ij}^k y \underline{p}_{ij}^k representan las desviaciones negativa y positiva para el límite inferior del intervalo. Del mismo modo, \overline{n}_{ij}^k y \overline{p}_{ij}^k representan las desviaciones negativa y positiva para el límite superior del intervalo.

Para cada experto k denotaremos por $\underline{N}^k = (\underline{n}_{ij}^k)$, $\underline{P}^k = (\underline{p}_{ij}^k)$, $\overline{N}^k = (\overline{n}_{ij}^k)$, $\overline{P}^k = (\overline{p}_{ij}^k)$, las matrices desviación (negativa y positiva), respectivamente de las matrices \overline{M}^k y \underline{M}^k . Se analizan los residuos intervalares en términos de \underline{n}_{ij}^k , \underline{p}_{ij}^k , \overline{n}_{ij}^k y \overline{p}_{ij}^k . Atendiendo a la expresión de r_{ij}^k en (4.64), se observa que el caso $\underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j < 0 < \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j$ corresponde a $\underline{b}_{ij}^k < v_i - v_j < \overline{b}_{ij}^k$. En este caso, $v_i - v_j$ está en el rango definido por el experto k por lo que no hay que penalizar dicho residuo. Por tanto, los residuos a minimizar son \underline{n}_{ij}^k y \overline{p}_{ij}^k ([AH83]). La formulación GP con datos intervalares del problema (4.28) es:

$$\begin{aligned}(\text{LGPOI})_{p|||} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \left\| \underline{N}^k + \overline{P}^k \right\|^p \\ \text{sujeto a} \quad & v \in \tilde{\mathcal{F}} \\ & \underline{B}^k - L_v + L_v^T - \underline{N}^k + \underline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\ & \overline{B}^k - L_v + L_v^T - \overline{N}^k + \overline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\ & v > 0, \underline{N}^k, \underline{P}^k, \overline{N}^k, \overline{P}^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{4.67}$$

si $1 \leq p < \infty$, siendo $\tilde{\mathcal{F}} = \{v \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n v_i = 0\}$ y $\alpha_k > 0$ peso asignado a priori al experto E_k , con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ y $\underline{B}^k = (\underline{b}_{ij}^k)$, $\overline{B}^k = (\overline{b}_{ij}^k)$, con $\underline{b}_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

Si $p = \infty$ el problema de optimización $(LGPOI)_{p|||}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{\infty|||} \quad & \text{mín } d \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \|\underline{N}^k + \overline{P}^k\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{B}^k - L_v + L_v^T - \underline{N}^k + \underline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & \overline{B}^k - L_v + L_v^T - \overline{N}^k + \overline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & v \in \tilde{\mathcal{F}} \\
 & v > 0, \underline{N}^k, \underline{P}^k, \overline{N}^k, \overline{P}^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

donde d es la desviación máxima.

Del mismo modo, la formulación λ -extendida intervalar para el problema de optimización log-consistente es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 (LXPOI)_{|||} \quad & \text{mín } \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \|\underline{N}^k + \overline{P}^k\| + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \|\underline{N}^k + \overline{P}^k\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{B}^k - L_v + L_v^T - \underline{N}^k + \underline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & \overline{B}^k - L_v + L_v^T - \overline{N}^k + \overline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & v \in \tilde{\mathcal{F}} \\
 & v > 0, \underline{N}^k, \underline{P}^k, \overline{N}^k, \overline{P}^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Consideremos ahora el problema sub-optimal con datos intervalares. En este caso, las desviaciones puntuales para cada i, j, k están dadas por:

$$r_{ij}^k = |m_{ij}^k w_j - w_i| \tag{4.70}$$

con $m_{ij}^k \in [\underline{m}_{ij}^k, \overline{m}_{ij}^k]$. Por ser $w_j > 0; \forall j = 1, \dots, n$, utilizando aritmética intervalar ([AH83]), se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 & \left| \left[\underline{m}_{ij}^k w_j - w_i, \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right] \right| = \\
 & \begin{cases} \left[\underline{m}_{ij}^k w_j - w_i, \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right] & \text{si } \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i \geq 0 \\ \left[0, \text{mín} \left\{ |\underline{m}_{ij}^k w_j - w_i|, \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right\} \right] & \text{si } \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i < 0 < \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \\ \left[w_i - \overline{m}_{ij}^k w_j, w_i - \underline{m}_{ij}^k w_j \right] & \text{si } \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

Siguiendo la estrategia planteada en la sección anterior, a partir de la expresión de la desviación intervalar r_{ij}^k dada en las ecuaciones (4.70) y (4.71), se definen las variables que representan las desviaciones negativa y positiva para ambos extremos del intervalo:

$$\begin{aligned} \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i &= \underline{n}_{ij}^k - \underline{p}_{ij}^k \\ \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i &= \overline{n}_{ij}^k - \overline{p}_{ij}^k \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.72)$$

con

$$\begin{aligned} \underline{n}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right| + \left(\underline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right) \right] \\ \underline{p}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right| - \left(\underline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right) \right] \\ \overline{n}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right| + \left(\overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right) \right] \\ \overline{p}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[\left| \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right| - \left(\overline{m}_{ij}^k w_j - w_i \right) \right] \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.73)$$

Las variables \underline{n}_{ij}^k y \underline{p}_{ij}^k representan las desviaciones negativa y positiva para el límite inferior del intervalo. Del mismo modo, \overline{n}_{ij}^k y \overline{p}_{ij}^k representan las desviaciones negativa y positiva para el límite superior del intervalo.

Como en el caso log-consistente, para cada experto k denotaremos por $\overline{N}^k = (\overline{n}_{ij}^k)$, $\overline{P}^k = (\overline{p}_{ij}^k)$, $\underline{N}^k = (\underline{n}_{ij}^k)$, $\underline{P}^k = (\underline{p}_{ij}^k)$, las matrices desviación (negativa y positiva), respectivamente de las matrices \overline{M}^k y \underline{M}^k . Atendiendo a la expresión de r_{ij}^k en (4.71), se observa que el caso $\underline{m}_{ij}^k w_j - w_i < 0 < \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i$ corresponde a $\underline{m}_{ij}^k < \frac{w_i}{w_j} < \overline{m}_{ij}^k$. En este caso, el cociente $\frac{w_i}{w_j}$ está en el rango dado por el experto k , por lo que no hay que penalizar dicho residuo. Por tanto, los residuos a minimizar son \underline{n}_{ij}^k y \underline{p}_{ij}^k ([AH83]). La formulación GP con datos intervalares del problema (4.31) es:

$$\begin{aligned} (WGPOI)_{p|||} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \left\| \underline{N}^k + \overline{P}^k \right\|^p \\ \text{sujeto a} \quad & w \in \mathcal{F} \\ & \underline{M}^k D_w - D_w E - \underline{N}^k + \underline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\ & \overline{M}^k D_w - D_w E - \overline{N}^k + \overline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\ & w > 0, \underline{N}^k, \underline{P}^k, \overline{N}^k, \overline{P}^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.74)$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

si $1 \leq p < \infty$, siendo $\mathcal{F} = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ y $\alpha_k > 0$ peso asignado a priori al experto E_k , con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

Si $p = \infty$ el problema de optimización $(WGPOI)_{p|||}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{\infty|||} \quad & \text{mín } d \\
 \text{sueto a} \quad & \alpha_k \|\underline{N}^k + \overline{P}^k\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & w \in \mathcal{F} \\
 & \underline{M}^k D_w - D_w E - \underline{N}^k + \underline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & \overline{M}^k D_w - D_w E - \overline{N}^k + \overline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & w > 0, \underline{N}^k, \underline{P}^k, \overline{N}^k, \overline{P}^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

si $1 \leq p < \infty$, siendo $\mathcal{F} = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ y $\alpha_k > 0$ peso asignado a priori al experto E_k , con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, donde d es la desviación máxima.

Del mismo modo, la formulación λ -extendida intervalar para el problema de optimización sub-optimal es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 (WXPOI)_{|||} \quad & \text{mín } \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \|\underline{N}^k + \overline{P}^k\| + \lambda d \right\} \\
 \text{sueto a} \quad & \alpha_k \|\underline{N}^k + \overline{P}^k\| \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 \text{sueto a} \quad & w \in \mathcal{F} \\
 & \underline{M}^k D_w - D_w E - \underline{N}^k + \underline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & \overline{M}^k D_w - D_w E - \overline{N}^k + \overline{P}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m \\
 & w > 0, \underline{N}^k, \underline{P}^k, \overline{N}^k, \overline{P}^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

si $1 \leq p < \infty$, siendo $\mathcal{F} = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ y $\alpha_k > 0$ peso asignado a priori al experto E_k , con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

Casos particulares de la formulación GP intervalar. Problema log-consistente

Se plantean a continuación, las formulaciones GP intervalares resolubles mediante la utilización de las métricas más usuales. Para la agregación de los expertos, se utiliza la métrica l_p , $p = 1, 2, \infty$ y como normas matriciales se considera la norma matricial 1, la norma de Frobenious, que se denotarán por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{Fr}$ respectivamente y las norma matriciales inducidas por normas vectoriales $\|\cdot\|_{m1}$ y $\|\cdot\|_{m\infty}$.

La formulación resultante de la utilización de las métricas l_1 y $\|\cdot\|_1$ en el pro-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

blema de optimización intervalar log-consistente, es el siguiente problema LP :

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{1|||1} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \right) \\
 \text{sujeto a} \quad & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$. Enfoques similares utilizando estas métricas han sido planteados en [BJ00], [WE07] y, utilizando una metodología de dos pasos en [WYX05].

La formulación del problema log-consistente utilizando las métricas l_∞ y $|||$ da como resultado el siguiente problema (también LP):

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{\infty|||1} \quad & \min d \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

A partir de los problemas log-consistentes (4.77) y (4.78) se plantea la siguien-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

te formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_1$:

$$\begin{aligned}
 (LXPOI)_{\|\cdot\|_1} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Al aplicar la métrica l_2 y la norma matricial $\|\cdot\|_{Fr}$ a la formulación del problema de optimización intervalar log-consistente, se obtiene la función objetivo $\min (\sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k)^2)^{1/2}$, equivalente al siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{2\|\cdot\|_{Fr}} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k)^2 \\
 \text{sujeto a} \quad & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$. Para este tipo de problemas, existe gran cantidad de procedimientos numéricos de resolución.

Una formulación logarítmica del problema, aplicando la métrica l_1 y la norma matricial $\|\cdot\|_{Fr}$ es propuesta en [CGW05].

La formulación resultante de la utilización de las métricas l_1 y $\|\cdot\|_{m1}$ en el pro-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

blema de optimización intervalar log-consistente, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{k=1}^m d_k \quad (4.81) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

En la ecuación (4.81), la restricción $\max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ para $j = 1, \dots, n$, por lo que la formulación *LP* de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{1||\|_{m1}} \quad & \min \sum_{k=1}^m d_k \quad (4.82) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

La formulación del problema log-consistente utilizando las métricas l_∞ y $||\|_{m1}$ da como resultado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{\infty||\|_{m1}} \quad & \min d \quad (4.83) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

A partir de los problemas log-consistentes (4.81) y (4.83) se plantea la siguiente formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_{m1}$:

$$\begin{aligned}
 (LXPOI)_{\|\cdot\|_{m1}} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Al utilizar las métricas l_1 y $\|\cdot\|_{m\infty}$ en el problema de optimización intervalar log-consistente, se obtiene la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^m d_k \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

En la ecuación (4.85), la restricción $\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ para $j = 1, \dots, n$, por lo que la formulación *LP*

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{1||\|\infty} \quad & \text{mín} \sum_{k=1}^m d_k \quad (4.86) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

La formulación del problema log-consistente utilizando las métricas l_∞ y $||\|\infty$ da como resultado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (LGPOI)_{\infty||\|\infty} \quad & \text{mín} d \quad (4.87) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

A partir de los problemas log-consistentes (4.85) y (4.87) se plantea la siguiente-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

te formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_{m\infty}$:

$$\begin{aligned}
 (LXPOI)_{\|\cdot\|_{m\infty}} \quad & \min \left\{ (1-\lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & v_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. La solución estará dada por $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Casos particulares de la formulación GP intervalar. Problema sub-optimal

Se plantean a continuación, las formulaciones GP intervalares resolubles mediante la utilización de las métricas más usuales. Para la agregación de los expertos, se utiliza la métrica l_p , $p = 1, 2, \infty$ y como normas matriciales se considera la norma matricial 1, la norma de Frobenious, que se denotarán por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{Fr}$ respectivamente y las norma matriciales inducidas por normas vectoriales $\|\cdot\|_{m1}$ y $\|\cdot\|_{m\infty}$.

La formulación resultante de la utilización de las métricas l_1 y $\|\cdot\|_1$ en el pro-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

blema de optimización intervalar sub-optimal, es el siguiente problema LP :

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{1|||1} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \right) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

Enfoques similares utilizando estas métricas han sido planteados en [IBA97], [AV93], [IK91] y en [DRT09]. En [GPR01] se presenta un problema análogo en el contexto de agregación de rankings.

La formulación del problema sub-optimal utilizando las métricas l_∞ y $|||_1$ da como resultado el siguiente problema (también LP):

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{\infty|||1} \quad & \min d \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

A partir de los problemas log-consistentes (4.89) y (4.90) se plantea la siguien-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

te formulación GP λ -extendida con norma matricial $\|\cdot\|_1$:

$$\begin{aligned}
 (WXPOI)_{\|\cdot\|_1} \quad & \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) + \lambda d \right\} \quad (4.91) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Al aplicar la métrica l_2 y la norma matricial $\|\cdot\|_{Fr}$ a la formulación del problema de optimización intervalar sub-optimal, se obtiene la función objetivo $\min (\sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k)^2)^{1/2}$, equivalente al siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{2\|\cdot\|_{Fr}} \quad & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k)^2 \quad (4.92) \\
 \text{sujeto a} \quad & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Para este tipo de problemas, existe gran cantidad de procedimientos numéricos de resolución.

La formulación resultante de la utilización de las métricas l_1 y $\|\cdot\|_{m1}$ en el pro-

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

blema de optimización intervalar sub-optimal, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} \sum_{k=1}^m d_k \tag{4.93} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \text{máx}_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

En la ecuación (4.93), la restricción $\text{máx}_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ para $j = 1, \dots, n$, por lo que la formulación *LP* de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{1||\|_{m1}} \quad & \text{mín} \sum_{k=1}^m d_k \tag{4.94} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

La formulación del problema sub-optimal utilizando las métricas l_∞ y $||\|_{m1}$ da

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

como resultado el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{\infty \| \|_{m1}} \quad & \text{mín } d & (4.95) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

A partir de los problemas sub-optimales (4.93) y (4.95) se plantea la siguiente formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $\| \|_{m1}$:

$$\begin{aligned}
 (WXPOI)_{\| \|_{m1}} \quad & \text{mín } \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} & (4.96) \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{i=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Al utilizar las métricas l_1 y $\| \|_{m\infty}$ en el problema de optimización intervalar

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

sub-optimal, se obtiene la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} \sum_{k=1}^m d_k \tag{4.97} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \text{máx}_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

En la ecuación (4.97), la restricción $\text{máx}_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ puede ser escrita como $\sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d$ para $i = 1, \dots, n$, por lo que la formulación *LP* de la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{1||\|\infty} \quad & \text{mín} \sum_{k=1}^m d_k \tag{4.98} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

La formulación del problema sub-optimal utilizando las métricas l_∞ y $||\|\infty$ da como resultado el siguiente problema:

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

$$\begin{aligned}
 (WGPOI)_{\infty |||_{m\infty}} \quad & \text{mín } d \tag{4.99} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

A partir de los problemas sub-optimales (4.97) y (4.99) se plantea la siguiente formulación *GP* λ -extendida con norma matricial $|||_{m\infty}$:

$$\begin{aligned}
 (WXPOI)_{|||_{m\infty}} \quad & \text{mín } \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m d_k + \lambda d \right\} \tag{4.100} \\
 \text{sujeto a} \quad & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \underline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \overline{m}_{ij}^k w_j - w_i - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

A continuación se incluyen varias observaciones relativas a los procedimientos propuestos anteriormente.

- Todos los algoritmos propuestos se reducen a problemas de programación lineal o cuadrática que se resuelven mediante métodos del tipo del simplex o mínimos cuadrados.

4. VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO CON DATOS INTERVALARES

- El parámetro $\lambda \in [0, 1]$, en los problemas λ -extendidos permite simular distintos criterios de optimalidad al buscar la solución, con una interpretación en la estrategia de actuación de grupo.
- Se hace notar que los métodos propuestos proporcionan vectores de prioridad puntuales, a partir de los cuales se puede obtener una indexación de las alternativas consideradas atendiendo a su relevancia. La mayoría de los métodos propuestos en la literatura que trabajan con juicios imprecisos, proporcionan soluciones intervalares, requiriendo el uso de técnicas adicionales para poder ordenar las alternativas.
- Los procedimientos propuestos anteriormente para el cálculo de vectores de prioridad de grupo permiten, en cada caso, calcular las desviaciones \underline{N}^k y \overline{P}^k . Estas desviaciones permiten expresar en algún sentido la discrepancia entre la solución obtenida y la información de preferencias del experto k , por medio de $\|\underline{N}^k + \overline{P}^k\|$. Estas medidas permiten, por otra parte, la detección de *outliers*, de los expertos con preferencias más extremas.

5. CASOS ESPECIALES. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD DE GRUPO

5.1. *Introducción*

En este capítulo se profundiza en el estudio de casos específicos de especial relevancia en el campo de problemas de decisión de grupo, proporcionando métodos y algoritmos para determinados tipos de matrices y de datos. Concretamente, se estudia el caso de información incompleta, por otra parte, se diseñan métodos que tienen en cuenta el grado de consistencia de los datos y, por último, técnicas que abordan la agregación de datos imprecisos atendiendo al grado de precisión de los mismos.

En primer lugar se plantea el problema de decisión a partir de información de preferencias incompleta, considerando matrices de comparación por pares puntuales e incompletas. En este caso, se sientan las bases teóricas para que el problema tenga solución y se definen funciones de disimilitud para matrices que tienen en cuenta los datos disponibles. A partir de ello, se establece el problema como una variante de la formulación general dada en el capítulo anterior. El enfoque adoptado se hace operativo considerando una función paramétrica de compromiso, en términos de la cual, se plantea un modelo computacional que simula el proceso de decisión con información incompleta, atendiendo a distintas estrategias. Estos resultados se han publicado en [DRT11].

Por otra parte, atendiendo a que la consistencia de los datos es una cuestión crítica en modelos que trabajan con matrices de comparación por pares, se presenta un modelo que tiene en cuenta el grado de inconsistencia de las matrices. Para ello, previamente se define una medida numérica que cuantifica el grado de inconsistencia de una PCM. Por otra parte, se proponen operadores de agregación que recogen el grado de inconsistencia de las matrices involucradas en el proceso. Adicionalmente se proporcionan técnicas de resolución de los problemas de optimización resultantes. Resultados preliminares obtenidos en esta línea se han presentado en [DRT10].

En el Capítulo 4 se ha visto como las matrices de comparación por pares intervalares ofrecen la posibilidad de formular y procesar juicios imprecisos. En general, los modelos que trabajan con datos intervalares no tienen en cuenta ex-

presamente el grado de certeza o de imprecisión en los juicios. Dado que la información en problemas con varios expertos puede ser no homogénea y venir expresada mediante datos intervalares con distinto grado de imprecisión, es de gran interés proporcionar métodos que capturen y tengan en cuenta el impacto del grado de certeza o precisión de los datos. Para ello, en primer lugar, se define el concepto de grado de precisión de un dato intervalar. Este parámetro se incorpora al modelo general convenientemente, para desarrollar métodos, que tienen en cuenta el grado de precisión de los datos, para sintetizar la preferencias imprecisas de los expertos en un vector de pesos puntual. En [DRTR07], el autor presenta una variante de dos pasos del modelo propuesto.

5.2. *Cálculo de vectores de prioridad de grupo a partir de información incompleta*

La complejidad de los problemas de decisión que surgen en las aplicaciones reales (contexto socio-económico, gestión pública, etc.) requieren, en general, de la participación de varios expertos para poder contemplar los múltiples aspectos relevantes del problema. En este escenario una situación común es la denominada genéricamente falta de datos o información parcial o incompleta, que responde a distintas situaciones. Un caso común es aquel en el que cada experto, atendiendo a su campo de conocimiento o experiencia, proporciona información precisa sobre un subconjunto del total de las alternativas a valorar. Otros casos se refieren a la falta o pérdida de datos locales, al interés en reducir el procesamiento y requerimiento de gran cantidad de datos, etc. El objetivo en esta sección es estudiar el problema de decisión en el que cada uno de los expertos, atendiendo a su formación, conocimiento del tema, etc., proporciona información parcial de preferencias representada en matrices de comparación por pares incompletas.

Así, en esta sección, se considera un conjunto de expertos $\{E_1, \dots, E_m\}$ que se enfrentan a un problema de decisión sobre las alternativas x_1, x_2, \dots, x_n , donde cada experto proporciona información de preferencias (posiblemente incompleta) sobre las alternativas, atendiendo a su conocimiento, formación, etc., mediante matrices de comparación por pares incompletas. En particular, se contempla el caso en el que cada experto E_k , proporciona solamente información sobre un subconjunto $X_k \subset X$ de alternativas, atendiendo a su campo de conocimiento, con $\bigcup_{k=1}^m X_k = X$.

El problema de decisión de grupo a partir de matrices de comparación por pares incompletas, ha sido estudiado desde distintos puntos de vista en la literatura. En el contexto del AHP, el método propuesto por Harker ([Har87]) se basa en un procedimiento para estimar los datos desconocidos de una matriz de comparación por pares utilizando la media geométrica. A partir de este método, se plantea

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

un algoritmo para reducir el número de juicios necesarios para obtener el vector de prioridad en el AHP. En [CKZ97] se realiza una simulación Monte Carlo para evaluar el efecto que tienen sobre la obtención del vector prioridad, algunas secuencias de borrado de parte de los elementos de las matrices, para matrices de varias dimensiones. En [YW99], se propone un método que estima los datos pareados que faltan en la matriz incompleta, considerando el efecto de la incertidumbre del experto sobre esas matrices. Para esto, el método asume la propiedad transitiva sobre la relación de preferencias para estimar los datos desconocidos, proponiendo dos formas (lineal y por varianza) de corregir la magnitud del nuevo dato, para ajustarlo a la escala que se esté utilizando. En [SOD98] se considera una matriz en la que un elemento es desconocido. Se propone entonces un método de estimación de dicho dato, a partir de una propiedad del polinomio característico de dicha matriz. En [HT06] se plantea un método heurístico ("backpropagation multi-layer perceptron") para obtener el dato desconocido de una matriz, a partir de la minimización de su índice de consistencia. Un método de estimación de los datos desconocidos de una matriz, basado en un índice de consistencia sobre la propiedad de reciprocidad aditiva, se propone en [FG07]. En [BFR10] se propone un algoritmo para completar los datos no disponibles de la matriz mediante una generalización del método del autovector y el método mínimos cuadrados.

Por otra parte, siguiendo un enfoque basado en distancias, el problema de información incompleta se ha considerado en los trabajos que se refieren a continuación. En [Kwi96] se aplica un método basado en la matriz pseudoinversa generalizada. Un enfoque basado en el método de los mínimos cuadrados se considera en [FM99], para el caso de un experto, y en [Tri00], para el caso particular de dos expertos. En [CT01] el problema es resuelto sin estimar previamente los valores desconocidos de la matriz, mediante el cálculo directo de la solución a partir de la formulación de un problema de optimización utilizando mínimos cuadrados. En [DRT11] el autor presenta las bases de esta sección. El problema de decisión de grupo con matrices incompletas ha sido abordado también en el contexto de preferencias fuzzy en [Xu04], [HVACH07], [ACH⁺08] y [Gon08].

La mayoría de los métodos que abordan el problema de información incompleta consideran matrices recíprocas y constan de un paso previo para construir una matriz completa siguiendo distintas estrategias. En este trabajo, se relajan esos requerimientos de reciprocidad y predicción de los datos desconocidos. El problema se plantea en términos de aproximación matricial, siguiendo el modelo presentado en el capítulo anterior, definiendo funciones de similitud adaptadas al caso de estudio.

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

5.2.1. Matrices de comparación por pares incompletas

Para abordar el problema de información incompleta, se va a introducir el concepto de matriz de comparación por pares (*PCM*) incompleta. Sea $M = (m_{ij})$ una *PCM* sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Se considera la relación de preferencias multiplicativa $\mu : X \times X \longrightarrow D$, asociada a M , según se vio en la Sección 2.2:

$$m_{ij} = \mu(x_i, x_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dicha relación de preferencia toma valores en el intervalo $[1/9, 9]$, si se usa la escala de Saaty.

La relación de preferencia μ se puede representar por un digrafo completo con pesos $\vec{G} = (V, \vec{E})$, donde el conjunto de vértices V es el conjunto X de alternativas y el peso del arco (i, j) en \vec{G} , $\mu(x_i, x_j)$, expresa la intensidad de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j , medida de acuerdo a la escala de Saaty. La matriz $M = (m_{ij})$, se puede ver como la matriz asociada al digrafo completo con pesos \vec{G} . Para extender el concepto de *PCM* al caso en el que no todos los valores son conocidos, se extiende el concepto de relación de preferencia multiplicativa a la situación donde la información de preferencias es incompleta. Para ello, se considera la posibilidad de que el digrafo \vec{G} no sea necesariamente completo. Por lo tanto, se considera un digrafo con pesos, no necesariamente completo, representado por la matriz no negativa $M = (m_{ij})$, donde $m_{ij} > 0$ ($m_{ij} \in [1, 1/9]$) representa el peso relativo de la alternativa i sobre la alternativa j ; en otro caso, $m_{ij} = 0$ indica que no está disponible el valor correspondiente a la comparación (i, j) . Se hace notar que $m_{ij} = 0$ no representa un valor cuantitativo, sino que es un valor simbólico que expresa el hecho de la no disponibilidad de esa comparación. La matriz no negativa M , así definida, se denomina matriz de comparación por pares incompleta.

5.2.2. Método de cálculo de un vector de prioridad de grupo con información incompleta

Se considera un grupo de expertos $\{E_1, \dots, E_m\}$ y se asume que el experto E_k proporciona sus preferencias acerca de las alternativas x_1, \dots, x_n por medio de una relación de preferencias multiplicativa posiblemente incompleta, expresada en la matriz de comparación por pares incompleta $M^k = (m_{ij}^k)_{i,j=1}^n$. Para representar el mapa de la relación de preferencia del grupo de expertos, se considera la matriz indicatriz del grupo $\Delta = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$, definida de la siguiente manera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \in \{1, \dots, m\} : m_{ij}^k \neq 0 \text{ o } m_{ji}^k \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

La matriz Δ es la matriz de adyacencia de un grafo H que representa los pares de alternativas que han sido comparados al menos por un experto del grupo. Se asume que H es un grafo conexo, en el sentido que para cada par de alternativas (x_i, x_j) , $x_i, x_j \in X$ ($x_i \neq x_j$), existe al menos una secuencia de arcos $(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)$ en H , con $i_1 = i$ y $j_l = j$, $l \geq 1$. Esto es, existen k_1, \dots, k_l ($0 \leq k_i \leq m$) tales que, al menos una comparación $(m_{i_1 j_1}^{k_1} \dots m_{i_l j_l}^{k_l})$ está disponible para la información de preferencias de las alternativas x_i y x_j . Esto significa que por cada par de alternativas diferentes, al menos una estimación de preferencia se encuentra disponible, directamente propuesta por un experto o indirectamente por medio de una secuencia de aristas de H . En el caso contrario, el conjunto de alternativas se podría dividir en al menos dos subconjuntos disjuntos, de modo que la información de preferencias de podría descomponer en "bloques", conteniendo cada uno de ellos información separable, únicamente relativa a las alternativas de cada subconjunto. Este caso se corresponde con tener dos problemas de cálculo de vector de prioridad independientes, en los que no se puede inferir información sobre las alternativas de uno de los subconjuntos a partir de los juicios de preferencias pareadas de las alternativas del otro subconjunto. Por ello, en adelante supondremos que el grafo H es conexo. El objetivo es, entonces, calcular las prioridades w_1, \dots, w_n , ($w_i > 0$) de las respectivas alternativas x_1, \dots, x_n a partir de la información dada por los expertos en las matrices M^k , $k = 1, \dots, m$, que pueden ser incompletas y no necesariamente consistentes.

Como se vio en la Sección 2.3, en el caso ideal, en que las matrices son consistentes y hay consenso unánime entre los expertos, existe $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ ($w_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1$) tal que

$$m_{ij}^k = \frac{w_i}{w_j} \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

Sin embargo, el caso ideal descrito en (5.1) rara vez se cumple en problemas reales. Por ello, atendiendo al enfoque seguido en la Sección 4.2.1 del trabajo, se busca una matriz consistente $n \times n$, $W = (w_{ij})$, con $w_{ij} = w_i/w_j$ que "esté lo más próxima" posible a las matrices incompletas M^k , considerando una medida de similitud $Sim(M^k, W)$, $k = 1, \dots, m$. Se plantea así, el problema de optimización multiobjetivo

$$\text{mín}(Sim(M^1, W), \dots, Sim(M^m, W)). \quad (5.2)$$

Atendiendo al problema que se está considerando, en el que cada experto sólo aporta información sobre un subconjunto de las alternativas, y a que el número de datos aportado por cada experto puede ser muy heterogéneo, se considera una medida que incorpora el número de datos dados por cada experto. Esta cuestión es de gran importancia si hay gran disparidad en el número de datos aportados por los expertos y previene situaciones extremas, en las que las preferencias de uno de los

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

expertos pudiese tener un impacto considerable en la decisión por proporcionar un mayor número de juicios que el resto de los expertos.

Para medir la distancia relativa entre una matriz $n \times n$ consistente W y una matriz posiblemente incompleta M^k , se define la función:

$$Sim(M^k, W) = \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:m_{ij}^k \neq 0}^n \left| m_{ij}^k - \frac{w_i}{w_j} \right| =: f_k(w) \quad (5.3)$$

donde n_k es el número de preferencias conocidas dadas por el experto E_k :

$$n_k = \#\{(i, j) : m_{ij}^k \neq 0\}.$$

Esta medida calcula la norma vectorial l_1 relativa a los índices (i, j) para los que m_{ij}^k es distinto de cero. Atendiendo a que se trabaja con matrices incompletas, la idea es recoger de alguna forma las dimensiones reales de los conjuntos de datos aportados por los expertos. Tal como se vió en la Sección 4.2.1, en general no existe una solución que optimice simultáneamente las funciones objetivo $f_k(w)$ en (5.2). Por ello se busca una solución compromiso que minimice una función objetivo que agrega las funciones $f_k(w)$, siguiendo alguno de los enfoques planteados en la Sección 4.2.2.

A continuación se incluye el desarrollo del problema, siguiendo la formulación $\lambda - extendida$ (4.37) como se presenta en el trabajo del autor [DRT11].

Se considera el problema de optimización paramétrico:

$$\min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:m_{ij}^k \neq 0}^n \left| m_{ij}^k - \frac{w_i}{w_j} \right| + \lambda \max_{k=1,\dots,m} \left\{ \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:m_{ij}^k \neq 0}^n \left| m_{ij}^k - \frac{w_i}{w_j} \right| \right\} \right\}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_i &> 0 \end{aligned}$$

con $\lambda \in [0, 1]$. La función objetivo del problema de optimización anterior se construye como una combinación lineal convexa de dos criterios extremos: minimizar la suma ponderada de las desviaciones de los expertos (métrica l_1) y minimizar la mayor desviación ponderada (métrica l_∞). Con el objetivo de resolver el problema planteado, se considera una transformación logarítmica de los datos dados por los expertos. De este modo, en el problema se sustituyen las funciones (5.3) por las funciones

$$\tilde{f}_k(w) = \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:m_{ij}^k \neq 0}^n |l_{ij}^k - v_i + v_j|$$

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

donde $l_{ij}^k = \log m_{ij}^k$ si $m_{ij}^k \neq 0$ y $v_i = \log w_i$, $i = 1, \dots, n$. Se considera entonces, el problema de optimización equivalente: obtener $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ tal que

$$\begin{aligned} \min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:m_{ij}^k \neq 0}^n |l_{ij}^k - v_i + v_j| + \right. \\ \left. \lambda \max_{k=1,\dots,m} \left\{ \alpha_k \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:m_{ij}^k \neq 0}^n |l_{ij}^k - v_i + v_j| \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

El problema de optimización (5.4) puede ser formulado como un problema GP mediante la transformación de variables descrita en (4.27). De este modo, se obtiene el siguiente problema GP extendido asociado a (5.4):

$$\min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:m_{ij}^k \neq 0}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) + \lambda d \right\}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_k} \sum_{i,j:1:m_{ij}^k \neq 0}^n (n_{ij}^k + p_{ij}^k) &\leq d \quad k = 1, \dots, m \\ l_{ij}^k - v_i + v_j - n_{ij}^k + p_{ij}^k &= 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m : m_{ij}^k \neq 0 \\ n_{ij}^k, p_{ij}^k &\geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m : m_{ij}^k \neq 0 \\ \sum_{i=1}^n v_i &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $\lambda \in [0, 1]$ y las variables n_{ij}^k y p_{ij}^k representan las desviaciones negativa y positiva, respectivamente. La formulación (5.5) responde a un problema de programación lineal para cada valor de λ , que puede ser resuelto utilizando el método del Simplex. Una vez que el vector v ha sido calculado, dado que $v_i = \log w_i$, $i = 1, \dots, n$, el vector de prioridad se obtiene mediante la siguiente solución normalizada:

$$w_i = e^{v_i} / \sum_{i=1}^n e^{v_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para ilustrar el funcionamiento del método propuesto, se considera a continuación el ejemplo dado en [KvU03], donde se comparan los resultados de varios métodos. En él se presenta un problema de decisión sobre cuatro alternativas $\{x_1, \dots, x_4\}$ y dos expertos E_1 y E_2 . Dichos expertos expresan sus preferencias

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

mediante las matrices de comparación por pares incompletas M^1 y M^2 :

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/9 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ 1/3 & 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/9 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se aprecia en las matrices, el experto E_1 no proporciona el dato relativo a la entrada m_{13}^1 mientras que E_2 no proporciona información de m_{23}^2 . Las matrices dadas son recíprocas atendiendo a los datos proporcionados, pero los datos no son compatibles. El experto E_1 claramente prefiere la alternativa x_4 mientras que E_2 prefiere x_2 . La formulación del problema de programación lineal resultante del método propuesto en 5.2.2, aplicado a las matrices dadas para el caso $\lambda = 0$, se presenta en forma resumida a continuación.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 0,036 n_{11}^1 + 0,036 p_{11}^1 + 0,036 n_{12}^1 + 0,036 p_{12}^1 + 0,036 n_{14}^1 + 0,036 p_{14}^1 \\ & + 0,036 n_{21}^1 + 0,036 p_{21}^1 + 0,036 n_{22}^1 + 0,036 p_{22}^1 + 0,036 n_{23}^1 + 0,036 p_{23}^1 \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & + 0,036 n_{44}^2 + 0,036 p_{44}^2 \\ \text{sujeto a} \quad & 0,036 n_{11}^1 + 0,036 p_{11}^1 + 0,036 n_{12}^1 + 0,036 p_{12}^1 + 0,036 n_{14}^1 \\ & + 0,036 p_{14}^1 + 0,036 n_{21}^1 + 0,036 p_{21}^1 + 0,036 n_{22}^1 + 0,036 p_{22}^1 \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & + 0,036 p_{43}^1 + 0,036 n_{44}^1 + 0,036 p_{44}^1 - D \leq 0 \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & - n_{12}^1 + p_{12}^1 - v_1 + v_2 = -1,099 \\ & - n_{14}^1 + p_{14}^1 - v_1 + v_4 = 0,693 \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & - n_{42}^2 + p_{42}^2 + v_2 - v_4 = 2,197 \\ & - n_{43}^2 + p_{43}^2 - v_4 + v_3 = 0,693 \end{aligned}$$

Una vez resuelto el problema de optimización, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla (5.1), para los casos en que $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Los resultados del vector de prioridad y del ranking obtenidos, se comparan con los resultados proporcionados por el método de Harker ([Har87], basado en el método del autovector principal) y con los dados por Kwiesielewicz ([Kwi96]), que aplica un

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

método basado en distancias, bajo un enfoque de mínimos cuadrados logarítmicos. El resultado que se presenta para el Método de Harker, se ha calculado (si-

Tab. 5.1: Vector de prioridad y ranking del método propuesto.

Método propuesto			
$\lambda = 0,0$		$\lambda = 1,0$	
Ranking	$x_1 > x_2 > x_4 = x_3$	Ranking	$x_1 > x_2 > x_4 > x_3$
w^t	(0,43, 0,29, 0,14, 0,14)	w^t	(0,39, 0,26, 0,13, 0,23)

Método de Harker		Método de Kwiesielewicz	
Ranking	$x_2 > x_4 > x_1 > x_3$	Ranking	$x_1 > x_2 > x_4 > x_3$
w^t	(0,29, 0,33, 0,09, 0,30)	w^t	(0,35, 0,29, 0,12, 0,24)

guiendo [KvU03]) mediante el promedio de los resultados obtenidos al aplicar el método de Harker de manera individual, a las matrices M^1 y M^2 . Se observa que el ranking final obtenido por los distintos métodos no es el mismo. El método de Harker proporciona el ranking $x_2 > x_4 > x_1 > x_3$, mientras que con los métodos basados en distancias (método de Kwiesielewicz [Kwi96] y el método propuesto) los rankings obtenidos son $x_1 > x_2 > x_4 = x_3$ y $x_1 > x_2 > x_4 > x_3$.

5.3. Cálculo de un vector de prioridad de grupo atendiendo a la consistencia de los expertos

Las matrices de comparación por pares son la base del modelo matemático sobre el que se construyen los métodos que abordamos en este trabajo. Un punto crucial de este marco teórico es la consistencia de estas matrices, ya que tal como se planteó en la Sección 2.2, el índice de consistencia de una matriz de comparación por pares puede ser un indicador de la calidad de los juicios sobre los que se basa la decisión. Por otra parte, trabajamos con problemas de grupo en los que se asume la existencia de un conjunto no necesariamente homogéneo de expertos, con diferentes perfiles y probablemente diferentes "grados de consistencia". Es entonces relevante proporcionar medidas del nivel o grado de consistencia de las matrices de preferencias de los expertos y tener en cuenta dichos niveles de consistencia en el proceso de cálculo de un vector de prioridad. En el contexto del AHP ([Saa80]), se define el índice de consistencia relativo CR (2.9) de una matriz de comparación por pares. El autor establece un valor de un 10 % como

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

límite superior de CR , para que los juicios pareados de la matriz sean considerados aceptables ([Saa80]). Así, aquellas matrices que tengan un índice de consistencia relativo mayor o igual a 0,1, no tienen la consistencia necesaria para ser consideradas en el proceso de decisión de grupo. A partir de lo anterior, el índice de consistencia relativo de Saaty puede ser interpretado como un peso booleano atendiendo a la consistencia, cuyo valor es 1 si el índice $CR < 0,1$ y 0 en caso contrario.

El objetivo es proporcionar métodos de cálculo de un vector de prioridad de grupo atendiendo al "grado de consistencia" de los expertos. Para ello, se define en primer término el concepto de peso o grado de consistencia de un experto, que cuantifica (en algún sentido) el peso del experto atendiendo a la inconsistencia de la matriz de comparación por pares dada por dicho experto. En segundo lugar se presentan métodos de cálculo de vectores de prioridad, a partir del modelo descrito en (4.21), incorporando los pesos de los expertos atendiendo a la consistencia.

5.3.1. Grado de consistencia de una matriz de comparación por pares

Sea $M = (m_{ij})$ una matriz $n \times n$ de comparación por pares recíproca, con $n \geq 2$. La mayoría de las matrices de comparación por pares que aparecen en las aplicaciones reales carecen de la propiedad de consistencia. Nos centraremos en el estudio de medidas que cuantifiquen la inconsistencia de una matriz de comparación por pares dada. En el caso ideal, en el que matriz es consistente, el autovalor dominante λ_{max} de la matriz M coincide con la dimensión n de dicha matriz. Atendiendo a ello, Saaty definió el índice de consistencia CI como:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \quad (5.6)$$

donde λ_{max} es el mayor autovalor de la matriz M . La existencia del autovalor dominante λ_{max} está garantizada según el Teorema de Perron (2.2.1) para matrices positivas. Sin embargo, en las aplicaciones reales, los problemas de toma de decisiones deben asumir como entradas matrices no consistentes. En este caso CI proporciona una medida de inconsistencia para matrices recíprocas, en función de la distancia entre el mayor autovalor λ_{max} de la matriz M y n (el mayor autovalor de una matriz consistente $n \times n$). A partir de este índice, Saaty definió la razón de consistencia (CR) de una matriz de comparación por pares:

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (5.7)$$

donde RI es un índice obtenido a partir del valor promedio de CI obtenido de la generación aleatoria de 500 matrices de comparación por pares recíprocas utilizando la escala de Saaty para sus elementos. Si la matriz es consistente, entonces

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

$\lambda_{max} = n$, $CI = 0$ y $CR = 0$. Saaty propuso que una razón de consistencia menor que 0,1 era aceptable y que en otro caso habría que reconsiderar la matriz. La definición de índice de consistencia propuesta por Saaty es la más aceptada en modelos que trabajan con matrices de comparación por pares, pero ha motivado planteamientos alternativos de consistencia de matrices en la literatura, en los que se cuestionan aspectos como la definición del umbral del CR del 10 %, la utilización de valores aleatorios en la construcción de la razón de consistencia, o la variabilidad del índice en función del tamaño de la matriz ([Bar98, PL03]). Medidas de consistencia alternativas han sido presentadas en algunos artículos como en [Koc93] y [DK94], en los que se plantea un índice de inconsistencia para matrices 3×3 definido a partir de la distancia relativa a las matrices consistentes 3×3 más próximas. En [Dod93] se propone un índice de consistencia inverso. En [Mon96] el autor propone nuevos umbrales de consistencia para el método del autovector, a partir del cálculo de la variación del vector de prioridad obtenida al incorporar nuevas alternativas al problema de decisión. En [PL03], se define un índice de consistencia considerando el promedio de los índices de consistencia de las matrices correspondientes a todas las transitividades, las que son definidas como estructuras de preferencias sobre subconjuntos de cardinalidad tres del conjunto de alternativas en evaluación. En [SM07], el autor define el índice de consistencia armónico, a partir de la utilización de la media armónica de la suma de los valores de las columnas de la matriz. Índices basados en el error mínimo cuadrático estimado ([CKS79], [Bar98]) o en el error estimado mínimo cuadrático logarítmico ([CW85]) han sido también propuestos como medidas de consistencia de matrices de comparación por pares. Una revisión exhaustiva de índices de consistencia y sus umbrales se presenta en [BR08].

Para definir un peso referente a la consistencia, nos apoyaremos en el índice de consistencia de Saaty, dado que es el más ampliamente utilizado como medida de consistencia. Previamente, es necesario determinar una cota superior, que denominaremos CI^* , para el índice de consistencia de Saaty, CI , que se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1 *Sea M una matriz recíproca $n \times n$ con $n \geq 2$, entonces:*

$$0 \leq CI \leq \frac{\max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right) - \lambda_{max}}{n - 1} := CI^* \quad (5.8)$$

donde λ_{max} es el mayor autovalor de la matriz M .

Demostración Dado que M es una matriz positiva, el Teorema de Perron garantiza la existencia de λ_{max} , que es el mayor mayor autovalor de la matriz M .

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

En el Teorema 2.2.2 se demostró que $\lambda_{max} \geq n$ y que $\lambda_{max} = n$ si y sólo si M es consistente, por lo que $\lambda_{max} - n \geq 0$. Por otra parte, aplicando el Teorema de Gershgorin [Ueb97] y considerando que en nuestro caso $m_{ii} = 1$, se obtiene:

$$|\lambda_{max} - 1| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |m_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dado que $m_{ij} > 0$ y $m_{ii} = 1$ para $i, j = 1, \dots, n$ (M es una matriz recíproca) y además $\lambda_{max} \geq n \geq 2$, se obtiene lo siguiente:

$$\lambda_{max} \leq \sum_{j=1}^n m_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$0 \leq \lambda_{max} - n \leq \max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right) - n. \quad (5.9)$$

Finalmente, a partir de (5.9), se obtiene

$$0 \leq \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \leq \frac{\max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right) - \lambda_{max}}{n - 1}$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Se define el peso de consistencia α de la matriz recíproca M como:

$$\alpha = 1 - \frac{CI}{CI^*} = \alpha = \frac{\max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right) - \lambda_{max}}{\max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right) - n}. \quad (5.10)$$

El peso α , definido anteriormente, establece una medida de fiabilidad, del nivel de consistencia de la matriz de comparación por pares M , en función del índice de consistencia de Saaty (5.6) y la cota superior dada en (5.8). Se hace notar que el peso atendiendo a la consistencia $\alpha \in [0, 1]$ y su valor máximo 1 es alcanzado si y solo si la matriz es consistente. El peso α definido en (5.10), proporciona una medida del grado de consistencia aplicable a matrices recíprocas.

En caso de que la matriz M no sea recíproca, no se puede garantizar $\lambda_{max} \geq n$, por lo que esta medida no es aplicable. La condición de reciprocidad de las matrices de comparación por pares generalmente no es cuestionada en la literatura. Sin

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

embargo, tal como se plantea en [KO99], las expresiones de preferencias debieran dar cuenta de situaciones prácticas en las que la matriz no es recíproca. Por ejemplo, un caso sería cuando la comparación de un elemento consigo mismo pudiese no ser 1, como la comparación a ciegas de dos tragos de un mismo vino. Por esto, es de interés relajar la condición de reciprocidad de las matrices de comparación por pares. Para extender el método que se va a proponer a matrices no recíprocas, se define a continuación una nueva medida de consistencia de una matriz M no necesariamente recíproca.

Sea M una matriz $n \times n$ positiva y $\|\cdot\|$ una norma matricial. Se define un índice de consistencia $IC_{\|\cdot\|}$ alternativo al dado por Saaty ([Saa80]), para una matriz M no necesariamente recíproca mediante:

$$IC_{\|\cdot\|}(M) = \|M - C\|$$

donde C es la matriz $n \times n$ consistente más próxima a la matriz M , en la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$. Este índice, para una métrica particular, (norma Frobenious) se ha considerado en [Bar98]. Suponemos ahora que se trabaja con un grupo de expertos E_1, E_2, \dots, E_m , que expresan sus juicios en matrices de comparación por pares M^1, M^2, \dots, M^m , no necesariamente recíprocas. Se define entonces, el peso (grado) de consistencia alternativo del experto k , $\alpha_{\|\cdot\|k}$, de la siguiente manera:

$$\alpha_{\|\cdot\|k} = 1 - \frac{\|M^k - C^k\|}{\sum_{j=1}^m \|M^j - C^j\|} \quad (5.11)$$

donde C^k es la matriz $n \times n$ consistente más próxima a la matriz M^k en la norma $\|\cdot\|$. Se hace notar que en este caso, la medida de inconsistencia de la matriz es en términos de la distancia inducida por la norma $\|\cdot\|$ de la matriz M dada al conjunto de matrices $n \times n$ consistentes.

5.3.2. Método de cálculo de un vector de prioridad de grupo atendiendo a la consistencia

Se considera un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y un grupo E_1, \dots, E_m de m expertos. Se asume que el experto E_k expresa sus juicios acerca de los elementos de X , por medio de una matriz de comparación por pares $M^k = (m_{ij}^k)$. En la práctica, aspectos como la complejidad de los problemas sobre los que se realiza la toma de decisión, la diversidad de formaciones o intereses de los expertos, hacen que la información proporcionada sea posiblemente incompatible y que las matrices de comparación por pares tengan distintos grados de consistencia. En ese contexto, el desafío es proporcionar un vector de prioridad de grupo $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ tal que los cocientes de los componentes de w reflejen lo

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

mejor posible las preferencias de los expertos y tengan en cuenta el grado de inconsistencia de la información de partida. Siguiendo el enfoque dado en la Sección 4.2.1, el problema se plantea en un marco de aproximación matricial. Dadas las matrices M^1, M^2, \dots, M^m y una norma matricial $\|\cdot\|$, encontrar un vector $w^* \in \mathcal{W}$ tal que

$$\|M^k - W^*\| = \min_{w \in \mathcal{W}} \|M^k - W\| \quad (5.12)$$

donde $k = 1, \dots, m$, $W = (w_i/w_j)$, $W^* = (w_i^*/w_j^*)$ y $\mathcal{W} = \{w = (w_1, \dots, w_n)^t : w_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ es el conjunto factible de vectores de prioridad.

Atendiendo al enfoque seguido en la Sección 4.2.2, para construir una *solución compromiso* del problema (5.12), se consideran las distancias l_p con peso para agregar las funciones objetivo (5.12). Dado que la consistencia es un aspecto crucial en los modelos de decisión que utilizan matrices de comparación por pares, se propone asignar un peso relativo, a todas las funciones objetivo que influyen en la decisión, atendiendo a la consistencia de los expertos. Para lo anterior, si las matrices dadas por los expertos son recíprocas, se asigna el peso α_k a cada expertos (5.10):

$$\alpha_k = \frac{\max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij}^k \right) - \lambda_{max}^k}{\max_{i=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^n m_{ij}^k \right) - n} \quad (5.13)$$

donde λ_{max}^k es el máximo autovalor de la matriz M^k . De acuerdo a lo planteado en la Sección 5.3.1, si no todas las matrices cumplen la condición de reciprocidad, se podrá considerar el peso atendiendo a la consistencia dado en (5.11):

$$\alpha_{\|\cdot\|k} = 1 - \frac{\|M^k - C^k\|}{\sum_{j=1}^m \|M^j - C^j\|}$$

A partir de lo anterior, la solución compromiso será el vector de prioridad $w^* \in \mathcal{W}$ que minimiza el desacuerdo del grupo, en el siguiente sentido. Dadas las matrices M^1, \dots, M^m y una norma matricial $\|\cdot\|$, encontrar un vector de prioridad $w^* \in \mathcal{W}$ (solución compromiso) tal que:

$$\min_{w \in \mathcal{W}} \sum_{k=1}^m (\alpha_k)^p \|M^k - (w_i/w_j)\|^p \quad \text{if } 1 \leq p < \infty \quad (5.14)$$

$$\min_{w \in \mathcal{W}} \max_{k=1 \dots m} \{\alpha_k \|M^k - (w_i/w_j)\|\} \quad \text{if } p = \infty \quad (5.15)$$

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

con α_k dado por (5.13). El coeficiente α_k asigna un peso de consistencia a cada experto k . Así, si el peso de consistencia de la matriz M^k aumenta, mayor importancia se le dará a la información proporcionada por el experto E_k . En el enfoque propuesto en esta sección, los pesos de los expertos que participan de la decisión están determinados por su nivel de consistencia. De este modo, tendrán mayor influencia en la decisión, aquellos expertos cuyas matrices reflejen un mayor grado de consistencia que el resto.

Formulación computacional y ejemplo numérico

La formulación computacional del modelo propuesto en (5.14) y (5.15), puede ser abordada siguiendo cualquiera de los algoritmos de resolución planteados en la Sección 4.3. Esto daría lugar a un problema sub-optimal, a un problema log-consistente, o a una formulación λ -extendida del problema, que se resuelven siguiendo los procedimientos dados en la Sección 4.3. Para ilustrar el funcionamiento del método propuesto, se considera el ejemplo dado en [SIT04]. En él se presentan cinco alternativas $\{x_1, \dots, x_5\}$ y cuatro expertos que expresan sus preferencias respecto a dichas alternativas, mediante las matrices de comparación por pares dadas a continuación:

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 9 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix} \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se calculan los índices de consistencia de Saaty para cada matriz: $CI(M^1) = 0$, $CI(M^2) = 0,0222$, $CI(M^3) = 0,0913$ y $CI(M^4) = 0,2812$. Para ilustrar la aplicación del método propuesto, se considera la formulación GP para aproximación log-consistente, para el caso de $p = 1$ y la norma matricial m_∞ dada por $\|M\| = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$ (4.39).

Una versión resumida de la formulación propuesta explícita del problema se muestra en (5.16). Por otra parte, se aplica el método del autovector principal a

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

cada una de las matrices M^k (que denotaremos por $EV(M^k)$), con $k = \dots, m$, en que se busca minimizar la distancia $|\lambda_{max}w - Mw|$, en este caso, bajo una métrica l_1 , considerando la condición de normalización $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} && d_1 + d_2 + d_3 + d_4 && (5.16) \\
 & \text{sujeto a} && && \\
 & -d_1 &+& 1,000 N_{11}^1 + 1,000 P_{11}^1 + 1,000 N_{12}^1 + 1,000 P_{12}^1 + 1,000 N_{13}^1 && \\
 & &+& 1,000 P_{13}^1 + 1,000 N_{14}^1 + 1,000 P_{14}^1 + 1,000 N_{15}^1 + 1,000 P_{15}^1 && \leq 0 \\
 & -d_1 &+& 1,000 N_{21}^1 + 1,000 P_{21}^1 + 1,000 N_{22}^1 + 1,000 P_{22}^1 + 1,000 N_{23}^1 && \\
 & &+& 1,000 P_{23}^1 + 1,000 N_{24}^1 + 1,000 P_{24}^1 + 1,000 N_{25}^1 + 1,000 P_{25}^1 && \leq 0 \\
 & \vdots && \vdots && \vdots \\
 & -d_4 &+& 0,898 N_{51}^4 + 0,898 P_{51}^4 + 0,898 N_{52}^4 + 0,898 P_{52}^4 + 0,898 N_{53}^4 && \\
 & &+& 0,898 P_{53}^4 + 0,898 N_{54}^4 + 0,898 P_{54}^4 + 0,898 N_{55}^4 + 0,898 P_{55}^4 && \leq 0 \\
 & && -N_{12}^1 + P_{12}^1 - v_1 + v_2 = 0 \\
 & && -N_{13}^1 + P_{13}^1 - v_1 + v_3 = -0,693 \\
 & && -N_{14}^1 + P_{14}^1 - v_1 + v_4 = -1,386 \\
 & \vdots && \vdots && \vdots \\
 & && -N_{53}^4 + P_{53}^4 + v_3 - v_5 = 1,386 \\
 & && -N_{54}^4 + P_{54}^4 + v_4 - v_5 = 0,693 \\
 & d_k && \geq 0 && k = 1, \dots, 4 \\
 & N_{ij}^k, P_{ij}^k && \geq 0 && i, j = 1, \dots, 5; \quad k = 1, \dots, 4 \\
 & v_i && \geq 0 && i = 1, \dots, 5
 \end{aligned}$$

En la Tabla 5.2 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el método del autovector a cada matriz $M^k(EV(M^k))$, $k = 1, \dots, 4$, así como los resultados obtenidos al aplicar el método (5.14) que denotaremos por $WD(M^1, M^2, M^3, M^4)$. Atendiendo a los resultados de la Tabla 5.2, se advierte que la ordenación de las alternativas obtenida al aplicar el método propuesto en (5.14), para la representación de las preferencias del grupo, confirma la preferencia de la alternativa x_1 sobre x_2 . Sin embargo, la dominancia de x_1 sobre x_2 se ve atenuada por la influencia del experto E_1 , experto con mayor grado de consistencia y que manifiesta indiferencia entre x_1 y x_2 , y por la influencia menor de E_4 (experto con menor grado de consistencia), para quien la alternativa x_2 es preferida a x_1 . Por otra parte, respecto a las alternativas x_3, x_4 y x_5 , la solución compromiso dada por el método (5.14) confirma el ranking individual proporcionado por los expertos más consistentes (E_1 y E_2) dado por $x_3 > x_4 > x_5$. De esa manera se resuelven opiniones dispares dadas por los expertos menos consistentes E_3 y E_4 .

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

Tab. 5.2: Vectores de prioridad obtenidos usando pesos atendiendo a la consistencia

Método	Vector de prioridad					Ranking
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
$EV(M^1)$	0.3478	0.3478	0.1739	0.0870	0.0435	$x_1 = x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$EV(M^2)$	0.4640	0.2413	0.1120	0.0998	0.0828	$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$
$EV(M^3)$	0.4468	0.2231	0.1185	0.1664	0.0452	$x_1 > x_2 > x_4 > x_3 > x_5$
$EV(M^4)$	0.2299	0.3732	0.1866	0.0933	0.1170	$x_2 > x_1 > x_3 > x_5 > x_4$
$WD(M^1, M^2, M^3, M^4)$	0.3648	0.3192	0.1596	0.1042	0.0521	$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$

5.4. Cálculo de un vector de prioridad atendiendo a la imprecisión de los datos

Las matrices de comparación por pares, base de los modelos abordados en el presente trabajo, proporcionan una forma de estructurar la información de preferencias de los expertos, relativa a un conjunto de alternativas. La escala de Saaty ([Saa77]) es probablemente la más usada para la asociación de valores numéricos a etiquetas lingüísticas que representan intensidades de preferencias de una alternativa respecto a otra. Esta escala utiliza los valores enteros del 1 al 9 y sus respectivos valores recíprocos para representar la información de preferencia, como se muestra en la Sección 2.2. Aunque los valores de la escala de Saaty proporcionan una gradación para los distintos niveles de intensidad de los juicios de preferencia, se ha establecido en la literatura la necesidad de desarrollar modelos que permitan abordar la posible imprecisión de los juicios. Como se ha visto en el Capítulo 4, las matrices de comparación por pares intervalares ofrecen la posibilidad de formular y procesar juicios imprecisos. En esta sección supondremos que los expertos E_1, \dots, E_m expresan sus preferencias respecto de las alternativas x_1, \dots, x_n , ($n \geq 2$), mediante matrices de comparación por pares intervalares M^1, \dots, M^m , con $M^k = ([\underline{m}_{ij}^k, \overline{m}_{ij}^k])$, $\underline{m}_{ji}^k \leq \overline{m}_{ji}^k$. Se asume que dichas matrices son recíprocas, utilizando aritmética intervalar. Esto es, $[\underline{m}_{ji}^k, \overline{m}_{ji}^k] = [\frac{1}{\overline{m}_{ij}^k}, \frac{1}{\underline{m}_{ij}^k}]$ y

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

$m_{ii} = 1$:

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & [m_{12}^k, \overline{m}_{12}^k] & \cdots & [m_{1n}^k, \overline{m}_{1n}^k] \\ [\frac{1}{m_{12}^k}, \frac{1}{\overline{m}_{12}^k}] & 1 & \cdots & [m_{2n}^k, \overline{m}_{2n}^k] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\frac{1}{m_{1n}^k}, \frac{1}{\overline{m}_{1n}^k}] & [\frac{1}{m_{2n}^k}, \frac{1}{\overline{m}_{2n}^k}] & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Los límites inferior y superior de los intervalos considerados pertenecen a alguna escala de intensidades de preferencia. Para la formulación del modelo se utilizará la escala de Saaty, por ser la más ampliamente usada en este campo.

A partir de las matrices intervalares M^k proporcionadas por los expertos, en el Capítulo 4 se abordó el problema de cálculo de un vector de prioridad de grupo que represente, en algún sentido definido, las preferencias del grupo. En general, los modelos que trabajan con datos intervalares no tienen en cuenta el grado de certeza o precisión en los juicios. Atendiendo a que la información en problemas con varios expertos puede ser no homogénea y venir expresada mediante datos intervalares con distinto grado de imprecisión, es de gran interés proporcionar métodos que capturen y tengan en cuenta el impacto del grado de certeza o precisión de los datos. Por ello, en esta sección se define, en primer lugar, el concepto de grado de precisión de un dato intervalar. Posteriormente se presenta una formulación general del problema de cálculo de un vector de prioridad de grupo, atendiendo al grado de precisión de los datos. El desarrollo del modelo analítico presentado se ilustra planteando la formulación explícita para una métrica y una norma matricial particular.

5.4.1. Grado de imprecisión de los elementos de una matriz de comparación por pares intervalar

Se considera una matriz de comparación por pares intervalar $M = ([m_{ij}, \overline{m}_{ij}])$, utilizando la escala de Saaty.

Para medir el grado de imprecisión o vaguedad de un dato intervalar se tendrá en cuenta la longitud del intervalo que lo define. De forma que, a mayor longitud del intervalo correspondiente al dato (i, j) , mayor es la imprecisión del dato, esto es, la información es más vaga. Así, el caso de mayor precisión corresponde a la situación en que los límites del intervalo son iguales, $m_{ij} = \overline{m}_{ij}$ y el dato es, por lo tanto, puntual. Por otra parte, el máximo grado de imprecisión se obtiene cuando el elemento intervalar (i, j) representa todo el rango de valores posibles de la escala con la que se trabaja. Siguiendo estas pautas, se definirá convenientemente el concepto de peso o grado de precisión del dato (i, j) , que denominaremos

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

α_{ij} , que alcanzará un valor máximo 1 cuando el dato sea preciso (límites inferior y superior iguales) y un valor mínimo 0, cuando el dato tenga la mayor imprecisión (corresponda a todo el rango de valores de la escala). Por otra parte, hay que tener en cuenta que se trabaja con matrices de comparación por pares y con la escala de Saaty, por lo que se utilizan valores recíprocos para la representación de las preferencias al invertir el orden de la comparación pareada. Atendiendo a esta consideración, para ajustar el grado de precisión del dato $m_{ij} = [\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ y el de su recíproco $1/m_{ij}$, asumiendo aritmética intervalar, se utilizará la transformación logarítmica de los valores correspondientes a la escala. En primer lugar, se define la función de longitud intervalar corregida de cada dato m_{ij} , $l(m_{ij})$, mediante:

$$l(m_{ij}) = \left| \frac{\overline{b_{ij}}}{|\overline{b_{ij}}|} e^{|\overline{b_{ij}}|} - \frac{\underline{b_{ij}}}{|\underline{b_{ij}}|} e^{|\underline{b_{ij}}|} - \left| \frac{\overline{b_{ij}}}{|\overline{b_{ij}}|} - \frac{\underline{b_{ij}}}{|\underline{b_{ij}}|} \right| \right| \quad \text{si } \underline{b_{ij}} \neq 0; \overline{b_{ij}} \neq 0$$

donde $\overline{b_{ij}} = \log(\overline{m_{ij}})$ y $\underline{b_{ij}} = \log(\underline{m_{ij}})$. Para el caso en que $\overline{b_{ij}} = 0$, la expresión $\frac{\overline{b_{ij}}}{|\overline{b_{ij}}|}$ es reemplazada por 1. Análogamente, si $\underline{b_{ij}} = 0$ la expresión $\frac{\underline{b_{ij}}}{|\underline{b_{ij}}|}$ es reemplazada por 1. La longitud intervalar corregida admite la expresión:

$$l(m_{ij}) = \begin{cases} \overline{m_{ij}} - \underline{m_{ij}} & \text{si } \underline{m_{ij}} > 1 \quad (\Rightarrow \overline{m_{ij}} > 1) \\ \overline{m_{ij}} + \frac{1}{\underline{m_{ij}}} - 2 = \overline{m_{ij}} + \overline{m_{ji}} - 2 & \text{si } \underline{m_{ij}} < 1 \text{ y } \overline{m_{ij}} > 1 \\ \frac{1}{\underline{m_{ij}}} - \frac{1}{\overline{m_{ij}}} = \overline{m_{ji}} - \underline{m_{ji}} & \text{si } \overline{m_{ij}} < 1 \quad (\Rightarrow \underline{m_{ij}} < 1) \end{cases}$$

Se hace notar que si el dato es puntual ($\underline{m_{ij}} = \overline{m_{ij}}$), $l(m_{ij}) = 0$. Así, si por ejemplo, el elemento m_{ij} tiene el valor $[3, 7]$, la longitud corregida del intervalo $l([3, 7])$ vale 4. Del mismo modo, la evaluación de la función l para los intervalos $[1/7, 1/3]$ o $[1/3, 3]$, también será 4. En la Figura 5.1 se representa la función de longitud corregida. Se observa que esta medida de longitud ecualiza todos los intervalos



Fig. 5.1: Función de longitud corregida para intervalos sobre la Escala de Saaty

semánticos de la escala de Saaty para que tengan la misma longitud corregida y es de especial interés en el manejo de datos recíprocos ($l(m_{ij}) = l(m_{ji})$), siendo

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

m_{ij} y m_{ji} datos intervalares). Una vez definida la función de longitud corregida, se define el grado de precisión del dato m_{ij} de la siguiente manera:

$$\alpha_{ij} = 1 - \frac{l(m_{ij})}{16} \quad (5.17)$$

donde 16 corresponde al máximo valor que puede alcanzar la función de longitud corregida del intervalo $l(m_{ij}^k)$, cuando se trabaja con la escala de Saaty.

Se hace notar que el mayor grado de imprecisión se obtiene cuando el experto proporciona como dato, el intervalo que cubre todos los valores de la escala utilizada, $[1/9, 9]$ en la escala de Saaty. En este caso, el grado de precisión $\alpha_{ij} = 0$, que es equiparable, desde el punto de vista de la información de entrada, al caso en el que no se conoce el dato. Esta consideración nos ofrece otro posible enfoque para abordar el tratamiento de información incompleta (estudiada en la Sección 5.2).

5.4.2. Método de cálculo de vectores de prioridad de grupo atendiendo a la imprecisión de los datos

Dado un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\} (n \geq 2)$ y un grupo de expertos $\{E_1, \dots, E_m\}$, el problema se plantea como la búsqueda de un vector de prioridad del grupo $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ tal que los cocientes de los componentes de w reflejen lo mejor posible las preferencias de los expertos y tengan en cuenta el grado de imprecisión de los datos intervalares m_{ij}^k proporcionados por los expertos. Para ello se plantea el siguiente problema de optimización: Encontrar $w = (w_1, \dots, w_n)^t$, con $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, tal que

$$\min \sum_{k=1}^m \|\Lambda^k \circ (M^k - W)\|^p \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \quad (5.18)$$

donde $M = ([m_{ij}, \overline{m_{ij}}])$, $\Lambda^k = (\alpha_{ij}^k)$ con α_{ij}^k definido como en (5.17), $W = (w_i/w_j)$ y $\|\cdot\|$ es una norma matricial. La notación \circ se refiere al producto de Hadamard de dos matrices de igual dimensión, definido en la sección 4.2.2.

Para la métrica $p = \infty$, para cada (i, j) ($i \neq j$), el problema queda planteado como un problema del tipo *minimax*:

$$\min_{k=1, \dots, m} \max \|\Lambda^k \circ (M^k - W)\|^p \quad \text{si } p = \infty \quad (5.19)$$

Se hace notar que en la formulación anterior, el residuo generado por cada elemento (i, j) de cada matriz M^k , está afectado por el peso α_{ij}^k , definido en (5.17), que mide el grado de precisión del dato.

Para abordar la resolución de los problemas planteados en (5.18) y (5.19), se puede seguir alguna de las estrategias planteadas en la Sección 4.3 lo que daría

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

lugar a un problema log-consistente, a un problema sub-optimal, o a una formulación λ -extendida del problema. En cualquiera de los casos, para desarrollar la formulación computacional, debe considerarse una variante de la formulación del problema GP intervalar, en la que cada residuo, para cada dato (i, j) del experto k , está afectado por el coeficiente α_{ij}^k . En [DRTR07], el autor presenta una variante de dos pasos del modelo propuesto. En la primera parte, se construye una *matriz de consenso* puntual, que tiene en cuenta el grado de imprecisión de los datos. Una vez obtenida dicha matriz, se calcula el vector de prioridad del grupo mediante alguno de los métodos de priorización planteados en el capítulo dos.

Para ilustrar el desarrollo del método analítico propuesto, se presenta una variante de la formulación GP log-consistente presentada en (4.67), con la distancia $p = 2$ y la norma matricial m_∞ (dada por $\|M\| = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$), y considerando el grado de precisión α_{ij}^k asociado a cada dato, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} && \sum_{k=1}^m d_k^2 && (5.20) \\
 & \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n \alpha_{ik}^k (\underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k) \leq d_k && i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & && \underline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \underline{n}_{ij}^k + \overline{p}_{ij}^k = 0 && i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & && \overline{b}_{ij}^k - v_i + v_j - \overline{n}_{ij}^k + \underline{p}_{ij}^k = 0 && i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \\
 & && v_i > 0 && i = 1, \dots, n \\
 & && \underline{n}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 && i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

en que $\underline{b}_{ij}^k = \log \underline{m}_{ij}^k$ y $\overline{b}_{ij}^k = \log \overline{m}_{ij}^k$. Una vez resuelto el problema de programación cuadrática anterior, la solución se obtiene después de efectuar la transformación $w_i = \exp v_i$, $i = 1, \dots, n$ y normalizar. En la formulación anterior se ha asumido que todos los expertos tienen el mismo peso, para simplificar la expresión final del problema. Para ilustrar la aplicación del método, se considera un ejemplo en el que cuatro expertos expresan sus preferencias respecto de cuatro alternativas en

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

las siguientes matrices de comparación por pares intervalares:

$$\begin{aligned}
 M^1 &= \begin{pmatrix} [1, 1] & [5, 9] & [\frac{1}{7}, \frac{1}{3}] & [3, 5] \\ [\frac{1}{9}, \frac{1}{5}] & [1, 1] & [\frac{1}{9}, \frac{1}{5}] & [\frac{1}{7}, \frac{1}{5}] \\ [3, 7] & [5, 9] & [1, 1] & [3, 7] \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [5, 7] & [\frac{1}{7}, \frac{1}{3}] & [1, 1] \end{pmatrix} & M^2 &= \begin{pmatrix} [1, 1] & [1, 3] & [3, 5] & [3, 5] \\ [\frac{1}{3}, 1] & [1, 1] & [\frac{1}{7}, \frac{1}{3}] & [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [3, 7] & [1, 1] & [1, 5] \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [3, 5] & [\frac{1}{5}, 1] & [1, 1] \end{pmatrix} \\
 M^3 &= \begin{pmatrix} [1, 1] & [3, 5] & [\frac{1}{9}, \frac{1}{3}] & [3, 5] \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [1, 1] & [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [\frac{1}{7}, \frac{1}{3}] \\ [3, 9] & [3, 5] & [1, 1] & [5, 7] \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [3, 7] & [\frac{1}{7}, \frac{1}{5}] & [1, 1] \end{pmatrix} & M^4 &= \begin{pmatrix} [1, 1] & [3, 5] & [1, 3] & [5, 7] \\ [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [1, 1] & [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] \\ [\frac{1}{3}, 1] & [3, 5] & [1, 1] & [3, 5] \\ [\frac{1}{7}, \frac{1}{5}] & [3, 5] & [\frac{1}{5}, \frac{1}{3}] & [1, 1] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Como se puede ver en las matrices dadas por los expertos, hay una variabilidad distinta en los grados de precisión de los datos dependiendo del experto. Así, por ejemplo, la matriz M^1 tiene cuatro elementos (y sus respectivos recíprocos) correspondientes a intervalos cuya longitud corregida es 4, valor mayor al del resto de los elementos intervalares de la matriz lo que indica que son datos con un menor grado de precisión que el resto. Por otra parte, los elementos de la matriz M^4 tienen todos el grado de precisión dado por un valor de longitud corregida de 2. A partir de la tabla anterior se calculan los pesos atendiendo a la imprecisión de los datos, que acompañan a los residuos en el correspondiente problema de optimización. Para ilustrar la aplicación del método propuesto, se considera la formulación GP cuadrática siguiendo el enfoque log-consistente dado en (5.20). Una versión resumida de la formulación explícita propuesta del problema se presenta

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

a continuación.

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} && d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \\
 & \text{sujeto a} && \\
 & -d_1 + 1,000 \underline{n}_{11}^1 + 1,000 \overline{p}_{11}^1 + 0,750 \underline{n}_{12}^1 + 0,750 \overline{p}_{12}^1 \\
 & \quad + 0,750 \underline{n}_{13}^1 + 0,750 \overline{p}_{13}^1 + 0,875 \underline{n}_{14}^1 + 0,875 \overline{p}_{14}^1 \leq 0 \\
 & -d_1 + 0,750 \underline{n}_{21}^1 + 0,750 \overline{p}_{21}^1 + 1,000 \underline{n}_{22}^1 + 1,000 \overline{p}_{22}^1 \\
 & \quad + 0,750 \underline{n}_{23}^1 + 0,750 \overline{p}_{23}^1 + 0,875 \underline{n}_{24}^1 + 0,875 \overline{p}_{24}^1 \leq 0 \\
 & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & -d_4 + 0,875 \underline{n}_{41}^4 + 0,875 \overline{p}_{41}^4 + 0,875 \underline{n}_{42}^4 + 0,875 \overline{p}_{42}^4 \\
 & \quad + 0,875 \underline{n}_{43}^4 + 0,875 \overline{p}_{43}^4 + 1,000 \underline{n}_{44}^4 + 1,000 \overline{p}_{44}^4 \leq 0 \\
 & \quad -\underline{n}_{12}^1 + \overline{p}_{12}^1 - v_1 + v_2 = -1,609 \\
 & \quad -\underline{n}_{13}^1 + \overline{p}_{13}^1 - v_1 + v_3 = 1,946 \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & \quad -\underline{n}_{43}^4 + \overline{p}_{43}^4 - v_4 + v_3 = 1,609 \\
 & \quad -\underline{n}_{12}^1 + \overline{p}_{12}^1 - v_1 + v_2 = -2,197 \\
 & \quad -\underline{n}_{13}^1 + \overline{p}_{13}^1 - v_1 + v_3 = 1,099 \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & \quad -\underline{n}_{43}^4 + \overline{p}_{43}^4 - v_4 + v_3 = 1,099 \\
 & d_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, 4 \\
 & \underline{n}_{ij}^k, \underline{p}_{ij}^k, \overline{n}_{ij}^k, \overline{p}_{ij}^k \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, 4; \quad k = 1, \dots, 4 \\
 & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4
 \end{aligned}$$

Observando las matrices de entrada al modelo, se aprecia que tanto la matriz M^1 como la matriz M^3 tienen como fila dominante en términos de preferencias a la fila 3, en la que todos los valores no diagonales corresponden a intervalos de valores mayores que 1. Por otra parte, al observar las matrices M^2 y M^4 se aprecia que en ambos casos la opción dominante es la alternativa x_1 . En la Tabla 5.3 se muestran los resultados obtenidos al resolver el problema descrito anteriormente. En los resultados se advierte que el valor obtenido para la componente del vector de prioridad correspondiente a la alternativa x_1 es mayor que el correspondiente a la alternativa x_3 ($0,446 > 0,373$), lo que es consistente con las variaciones en el grado de precisión de los datos de las matrices correspondientes a la comparación

5. VARIANTES EN EL CÁLCULO DEL VECTOR DE PRIORIDAD

entre las alternativas x_1 y x_3 . Así, mientras que los datos en los que la alternativa x_3 es preferida a la alternativa x_1 tienen baja precisión, dada por intervalos con longitudes corregidas de 4 para la matriz M^1 ($m_{13}^1 = [1/7, 1/3]$) y de 6 para la matriz M^3 ($m_{13}^3 = [1/9, 1/3]$), los datos de las restantes matrices en los que x_1 es preferida a la alternativa x_3 tienen mayor precisión, con valores de longitud corregida del intervalo de 2 en ambos casos ($m_{13}^2 = [3, 5]$ y $m_{13}^4 = [1, 3]$).

Tab. 5.3: Vector de prioridad y ranking del método propuesto.

Ranking	$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$
w^f	(0,446, 0,075, 0,373, 0,106)

6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

En el trabajo se ha abordado el problema de obtención de vectores de prioridad de un conjunto de alternativas, a partir de información de preferencias imprecisa proporcionada por un grupo de expertos. Se ha proporcionado un marco teórico general, métodos y algoritmos de cálculo de vectores de prioridad a partir de matrices de comparación por pares con datos intervalares.

Como primer paso, se ha desarrollado el marco formal del problema para el caso de un experto en el contexto de aproximación de matrices, que integra los principales métodos basados en distancias presentados en la literatura. El problema general se ha abordado siguiendo dos metodologías: una basada en la transformación logarítmica de los datos y otra basada en la consideración de un problema sub-optimal asociado al problema original. Además, se han desarrollado algoritmos de cálculo que permiten hacer operativos los métodos propuestos, mediante formulaciones basadas en técnicas de Programación por Metas (Goal Programming), para las normas vectoriales l_p más usuales (l_1 , l_2 y l_∞) y las normas matriciales $\| \cdot \|_{mp}$ inducidas por la norma vectorial l_p , con $p = 1$ y $p = \infty$. El desarrollo de la formulación utilizando Goal Programming hizo posible el trabajo [RPRTGRG10] publicado en una revista incluida en el Journal Citation Report (JCR) (primer cuartil).

Uno aspecto importante es el análisis de las soluciones y de la actuación de los métodos de priorización propuestos. Para ello se ha proporcionado un conjunto de medidas para hacer posible el análisis. Además, se ha realizado un estudio comparativo de los principales métodos de cálculo planteados, atendiendo al comportamiento de las soluciones al aumentar el índice de consistencia de la matriz de partida,

El experimento se basa en un procedimiento de generación de familias de matrices de Saaty aleatorias, con índice de consistencia relativo en un rango prefijado. De esta forma, es posible realizar el análisis de los métodos directamente, a partir de la variación del índice de consistencia relativo de las matrices, y no a través de parámetros indirectos de perturbación de algunos de sus elementos, como están diseñados la mayoría de los experimentos descritos en la literatura. A partir de lo anterior, fue posible realizar la comparativa de un amplio espectro de métodos para distintos niveles de inconsistencia en las matrices de entrada, replicando

6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

el análisis para matrices de dimensiones 4, 6 y 8. Un trabajo preliminar de este estudio fue presentado en [DRTS09].

Otra de las aportaciones de este trabajo, es el marco teórico general en el que se formula el problema de cálculo de vectores de prioridad para el caso de varios expertos, con datos intervalares. El problema se ha planteado como un problema de optimización en un espacio normado de matrices, siguiendo las metodologías sub-optimal y log-consistente. El modelo que se propone integra y extiende varias de las líneas de investigación actuales en el tema. Además relaja condiciones y restricciones al problema que se asumen en los métodos propuestos en la literatura.

Varias son las características que se pueden destacar: -

- El problema de optimización planteado aborda simultáneamente el problema de consistencia de las matrices de entrada, el problema de integrar las preferencias de los distintos expertos y el problema de manejo de la imprecisión.
- En dicho modelo se busca una solución que optimice la satisfacción del grupo. Esta se define en términos de operadores de agregación (mediante métricas lp) de funciones objetivo, que miden las desviaciones de los datos aportados por los expertos de una matriz ideal consistente, en una norma matricial. El parámetro p articula la estrategia del grupo.
- El modelo propuesto no asume homogeneidad en los expertos.
- No se requiere que las matrices de partida sean recíprocas.
- Se proporcionan algoritmos de resolución de los problemas de optimización resultantes con datos intervalares, para las métricas más usuales, mediante el uso de técnicas de programación por metas.
- Las técnicas de resolución del problema, proporcionan medidas del nivel de desacuerdo del grupo y de los expertos con la solución de grupo obtenida.
- Los métodos planteados proporcionan vectores de prioridad puntuales. La mayoría de los métodos propuestos en la literatura que trabajan con datos intervalares, proporcionan vectores de prioridades intervalares. Por tanto, en caso de solapamiento de los pesos intervalares, se requiere el uso adicional de técnicas para discriminar el orden de las alternativas.

Resultados preliminares en esta línea de investigación han sido publicados en [DRTR07] y en [DRT09], indexadas en la base de datos bibliográfica del ISI (Institute for Scientific Information) y presentadas en [DRT07].

6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Adicionalmente, se ha profundizado en el estudio de casos específicos de especial relevancia en el campo de problemas de decisión de grupo, proporcionando métodos y algoritmos para determinados tipos de matrices y de datos.

En primer lugar, se ha estudiado el caso de información de preferencias incompleta. Se ha establecido la base teórica para que el problema tenga solución, en términos de un grafo que representa la información de preferencias del grupo. Se ha propuesto un método de cálculo del vector de prioridad, a partir de un problema de optimización paramétrica en términos de funciones de similitud para matrices que tienen en cuenta los datos disponibles. La mayoría de los métodos que abordan el problema de información incompleta en la literatura, consideran matrices recíprocas y constan de un paso previo para construir una matriz completa siguiendo distintas estrategias. En el método propuesto, se relajan estos requerimientos de reciprocidad y predicción de los datos desconocidos. La metodología propuesta se ha publicado en [DRT11], publicación incluida en el JCR (primer cuartil).

Otra variante analizada ha sido el cálculo del vector de prioridad atendiendo al grado de consistencia de los expertos. Para ello, se ha definido en primer lugar un parámetro, denominado grado de consistencia del experto, que permite cuantificar el nivel de inconsistencia de los datos aportados por dicho experto. A partir de este parámetro se ha proporcionado una variante de la formulación general del problema y su correspondiente formulación computacional, que incorpora el grado de inconsistencia de los expertos. Una versión preliminar de este método fue presentada en [DRT10] y se está elaborando un artículo para su pronto envío a una revista incluida en el JCR.

Finalmente, se ha presentado una variante del cálculo del vector de prioridad, con datos intervalares, atendiendo al grado de imprecisión de los datos. Para ello, se ha definido el grado de imprecisión de un elemento de una PCM, a partir de la longitud del intervalo que define dicho elemento, trabajando con una transformación logarítmica de la escala de Saaty. Resultados preliminares en esta línea de investigación se han publicado en [DRTR07] (publicación indexada en la base de datos ISI).

Dentro de las líneas de trabajo futuro se encuentra el desarrollo de métodos de cálculo del vector de prioridad de grupo con datos de entrada en los que la imprecisión está modelada mediante datos fuzzy.

Por otra parte, las posibles aplicaciones de este tipo de métodos constituyen interesantes posibilidades de líneas de investigación. Al respecto, parece de interés evaluar la posibilidad de aplicar estos métodos basados en comparaciones pareadas en plataformas de participación ciudadana, en el ámbito de la democracia electrónica, para - de ese modo - poder obtener y estructurar la información de las preferencias de los ciudadanos.

REFERENCIAS

- [ACH⁺08] S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J. Alcalá-Fdez. A consistency based procedure to estimate missing pairwise preference values. *International Journal of Intelligent Systems*, 23(2):155–175, 2008.
- [AH83] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*. Academic Press, New York, 1983.
- [Arb89] A. Arbel. Approximate articulation of preference and priority derivation. *European Journal of Operational Research*, 43(3):317–326, 1989.
- [Arb91] A. Arbel. A linear programming approach for processing approximate articulation of preference. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 356:79–86, 1991.
- [Arr50] K. J. Arrow. A difficulty in the concept of social welfare. *The Journal of Political Economy*, 58(4):328–346, 1950.
- [Arr51] K. J. Arrow. *Social choice and individual values*. Yale Univ Pr, 1951.
- [AS83] J. Aczel and T. L. Saaty. Procedures for synthesizing ratio judgements. *Journal of mathematical psychology(Print)*, 27(1):93–102, 1983.
- [AV93] A. Arbel and L. G. Vargas. Preference simulation and preference programming: robustness issues in priority derivation. *European Journal of Operational Research*, 69(2):200–209, 1993.
- [Bar98] J. Barzilai. Consistency measures for pairwise comparison matrices. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 7:123–132, 1998.
- [BCC06] R. Blanquero, E. Carrizosa, and E. Conde. Inferring efficient weights from pairwise comparison matrices. *Mathematical Methods of Operations Research (ZOR)*, 64(2):271–284, 2006.

- [BCG92] J. Barzilai, W. D. Cook, and B. Golany. The analytic hierarchy process: structure of the problem and its solutions. *Systems and Management Science by Extremal Methods*, pages 361–371, 1992.
 - [BdGL89] C. G. E. Boender, J. G. de Graan, and F. A. Lootsma. Multicriteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons. *Fuzzy Sets and Systems*, 29(2):133–143, 1989.
 - [BFR10] S. Bozóki, J. Fülöp, and L. Rónyai. On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010.
 - [BG03] L. Bodin and S. I. Gass. On teaching the analytic hierarchy process. *Computers and Operations Research*, 30(10):1487–1497, 2003.
 - [BJ00] N. K. M. Bryson and A. Joseph. Generating consensus priority interval vectors for group decision-making in the ahp. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 9(4):127–137, 2000.
 - [Boz01] S. Bozóki. An analysis of the analytic hierarchy process, 2001.
 - [Boz06] S. Bozóki. Weights from pairwise comparisons and evaluation by using utility functions in multi-attribute decision problems, 2006.
 - [Boz08] S. Bozóki. Solution of the least squares method problem of pairwise comparison matrices. *Central European Journal of Operations Research*, 16(4):345–358, 2008.
 - [BP94] A. Berman and R. J. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Society for Industrial Mathematics, 1994.
 - [BR08] S. Bozóki and T. Rapcsák. On saaty’s and koczkodaj’s inconsistencies of pairwise comparison matrices. *Journal of Global Optimization*, 42(2):157–175, 2008.
 - [Bry95] N. Bryson. A goal programming method for generating priority vectors. *The Journal of the Operational Research Society*, 46(5):641–648, 1995.
 - [BS02] V. Belton and T. J. Stewart. *Multiple criteria decision analysis: an integrated approach*. Springer, 2002.
-

- [BTSCF05] L. A. Bojorquez-Tapia, S. Sanchez-Colon, and A. Florez. Building consensus in environmental impact assessment through multicriteria modeling and sensitivity analysis. *Environmental management*, 36(3):469–481, Sep 2005. PUBM: Print; JID: 7703893; 0 (Environmental Pollutants); ppublish.
- [But03] P. Butkovic. Max-algebra: the linear algebra of combinatorics? *Linear Algebra and its Applications*, 367:313–335, 2003.
- [BV04] S. P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [CC77] A. Charnes and W. Cooper. Goal programming and multiple objective optimizations. *European Journal of Operational Research*, 1:39–54, 1977.
- [CC08] Y. G. Cho and K. T. Cho. A loss function approach to group preference aggregation in the ahp. *Computers and Operations Research*, 35(3):884–892, 2008.
- [CGW05] B. Chandran, B. Golden, and E. Wasil. Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process. *Computers and Operations Research*, 32(9):2235–2254, 2005.
- [Che05] Z. Chen. Consensus in group decision making under linguistic assessments, 2005.
- [Chu98] M. T. Chu. On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 272:155–168, 1998.
- [CK88] W. D. Cook and M. Kress. Deriving weights from pairwise comparison ratio matrices: An axiomatic approach. *European Journal of Operational Research*, 37(3):355–362, 1988.
- [CKS79] A. T. W. Chu, R. E. Kalaba, and K. Spingarn. A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 27(4):531–538, 1979.
- [CKZ97] F. J. Carmone, A. Kara, and S. H. Zanakis. A monte carlo investigation of incomplete pairwise comparison matrices in ahp. *European Journal of Operational Research*, 102(3):538–553, 1997.

Referencias

- [CR01] A. Chwolka and M. G. Raith. Group preference aggregation with the ahp-implications for multiple-issue agendas. *European Journal of Operational Research*, 132(1):176–186, 2001.
- [CT01] Q. Chen and E. Triantaphyllou. *Estimating Data for Multi-Criteria Decision Making Problems: Optimization Techniques*, volume 2, pages 27–36. Dordrecht, 2001.
- [Cve00] D. Cvetkovic. Evolutionary multi-objective decision support systems for conceptual design, 2000.
- [CW85] G. Crawford and C. Williams. A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of mathematical psychology*, 29(4):387–405, 1985.
- [CW04] E. U. Choo and W. C. Wedley. A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices. *Computers and Operations Research*, 31(6):893–908, 2004.
- [CZ73] J. L. Cochrane and M. Zeleny. *Multiple criteria decision making*. University of South Carolina Press, 1973.
- [Dav88] H. A. David. *The Method of Paired Comparisons*, volume 41. Oxford University Press, New York, NY, 1988.
- [DGP03] E. Dopazo and J. González-Pachón. Consistency-driven approximation of a pairwise comparison matrix. *Kybernetika*, 39(5):561–568, 2003.
- [DK94] Z. Duszak and W. W. Koczkodaj. Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons. *Information Processing Letters*, 52(5):273–276, 1994.
- [Dod93] H. A. Dodd. A statistical approach to consistency in AHP. *Mathematical and Computer Modelling*, 18(6):19–22, 1993.
- [DRT06] E. Dopazo and M. Ruiz-Tagle. A GP formulation for aggregating preferences with interval assessments. In *Proceedings of MOPGP06 (Multiobjective Programming and Goal Programming) International Conference*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [DRT07] E. Dopazo and M. Ruiz-Tagle. Consensus modelling in decision making with interval assessments. In *22nd European Conference on Operational Research*, July, 8 - 11 2007.

Referencias

- [DRT09] E. Dopazo and M. Ruiz-Tagle. A GP formulation for aggregating preferences with interval assessments. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 618:47–54, 2009.
- [DRT10] E. Dopazo and M. Ruiz-Tagle. A consistency-based method for aggregating preference information from multiple pairwise comparison matrices. In *24th European Conference on Operational Research*, July, 12 - 14 2010.
- [DRT11] E. Dopazo and M. Ruiz-Tagle. A parametric GP model dealing with incomplete information for group decision-making. *Applied Mathematics and Computation*, 218(2):514–519, 2011.
- [DRTR07] E. Dopazo, M. Ruiz-Tagle, and J. Robles. Preference learning from interval pairwise data. a distance-based approach. *Lecture Notes in Computer Science*, 4881:240–247, 2007.
- [DRTS09] E. Dopazo, M. Ruiz-Tagle, and M. Serrano. Perturbation results for computing priority vectors from a pairwise comparison matrix. In *23rd European Conference on Operational Research*, July, 5 - 8 2009.
- [EMJ07] M. T. Escobar and J. M. Moreno-Jiménez. Aggregation of individual preference structures in AHP-group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 16(4):287–301, 2007.
- [EvdD04] L. Elsner and P. van den Driessche. Max-algebra and pairwise comparison matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 385:47–62, 2004.
- [EW05] M. Ehrgott and M. Wiecek. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer, 2005.
- [FG07] M. Fedrizzi and S. Giove. Incomplete pairwise comparison and consistency optimization. *European Journal of Operational Research*, 183(1):303–313, 2007.
- [FGR04] A. Farkas, A. György, and P. Rózsa. On the spectrum of pairwise comparison matrices. *Linear algebra and its applications*, 385:443–462, 2004.
- [Fic86] J. Fichtner. On deriving priority vectors from matrices of pairwise comparisons. *Socio-economic planning sciences*, 20(6):341–345, 1986.

- [FISS03] Y. Freund, R. Iyer, R. E. Schapire, and Y. Singer. An efficient boosting algorithm for combining preferences. *The Journal of Machine Learning Research*, 4:933–969, 2003.
 - [Fül08] J. Fülöp. A method for approximating pairwise comparison matrices by consistent matrices. *Journal of Global Optimization*, 42(3):423–442, 2008.
 - [FLR03] A. Farkas, P. Lancaster, and P. Rozsa. Consistency adjustments for pairwise comparison matrices. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 10(8):689–700, 2003.
 - [FLR05] A. Farkas, P. Lancaster, and P. Rózsa. Approximation of positive matrices by transitive matrices. *Computers and Mathematics with Applications*, 50(7):1033–1039, 2005.
 - [FM99] Z. Fan and J. Ma. An approach to multiple attribute decision making based on incomplete information on alternatives. In *System Sciences, 1999. HICSS-32. Proceedings of the 32nd Annual Hawaii International Conference on*, 1999.
 - [FP98] E. Forman and K. Peniwati. Aggregating individual judgments and priorities with the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 108(1):165–169, 1998.
 - [FR01] A. Farkas and P. Rózsa. Data perturbations of matrices of pairwise comparisons. *Annals of Operations Research*, 101(1):401–425, 2001.
 - [FRS99] A. Farkas, P. Rózsa, and E. Stubnya. Transitive matrices and their applications. *Linear Algebra and its Applications*, 302:423–433, 1999.
 - [GK93] B. Golany and M. Kress. A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices. *European Journal of Operational Research*, 69(2):210–220, 1993.
 - [GLD93] C. Genest, F. Lapointe, and S. Drury. On a proposal of jensen for the analysis of ordinal pairwise preferences using saaty’s eigenvector scaling method. *Journal of mathematical psychology*, 37:575–610, 1993.
 - [Gon08] Z. W. Gong. Least-square method to priority of the fuzzy preference relations with incomplete information. *International Journal of Approximate Reasoning*, 47(2):258–264, 2008.
-

Referencias

- [GPR99] J. González-Pachón and C. Romero. Distance-based consensus methods: a goal programming approach. *Omega*, 27(3):341–347, 1999.
- [GPR01] J. González-Pachón and C. Romero. Aggregation of partial ordinal rankings: an interval goal programming approach. *Computers and Operations Research*, 28(8):827–834, 2001.
- [GPR04] J. González-Pachón and C. Romero. A method for dealing with inconsistencies in pairwise comparisons. *European Journal of Operational Research*, 158(2):351–361, 2004.
- [GPR07] J. González-Pachón and C. Romero. Inferring consensus weights from pairwise comparison matrices without suitable properties. *Annals of Operations Research*, 154(1):123–132, 2007.
- [Haa] M. Haahr. Random.org: True random number service. <http://www.random.org>. Visitado: 14/07/2011.
- [Hai98] L. M. Haines. A statistical approach to the analytic hierarchy process with interval judgements.(i). distributions on feasible regions. *European Journal of Operational Research*, 110(1):112–125, 1998.
- [Har87] P. T. Harker. Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process. *Mathematical Modelling*, 9(11):837–848, 1987.
- [HGO00] R. Herbrich, T. Graepel, and K. Obermayer. *Large margin rank boundaries for ordinal regression*. *Advances in Large Margin Classifiers*, chapter 7, pages 115–132. Advances in Large Margin Classifiers. MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- [HK94] R. P. Härmäläinen and E. Kettunen. On-line group decision support by hipre 3+ group link. In *Proceedings of the Third International Conference on the Analytic Hierarchy Process, July 11-13, 1994*, pages 547–557. Citeseer, 1994.
- [HK96] M. W. Herman and W. W. Koczkodaj. A monte carlo study of pairwise comparison. *Information Processing Letters*, 57(1):25–29, 1996.

- [HL96] R. C. Van Den Honert and F. A. Lootsma. Group preference aggregation in the multiplicative ahp the model of the group decision process and pareto optimality. *European Journal of Operational Research*, 96(2):363–370, 1996.
 - [HLLPM06] A. J. Herencia-Leva, M. T. Lamata, and C. Pérez-Meléndez. The pairwise comparison model: The multiplicative and the additive approach. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3885:70, 2006.
 - [HT98] T. Hastie and R. Tibshirani. Classification by pairwise coupling. *The Annals of Statistics*, 26(2):451–471, 1998.
 - [HT06] Y. C. Hu and J. F. Tsai. Backpropagation multi-layer perceptron for incomplete pairwise comparison matrices in analytic hierarchy process. *Applied Mathematics and Computation*, 180(1):53–62, 2006.
 - [HVACH07] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, and F. Herrera. A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 15(5):863–877, 2007.
 - [IBA97] R. Islam, MP Biswal, and SS Alam. Preference programming and inconsistent interval judgments. *European Journal of Operational Research*, 97(1):53–62, 1997.
 - [Ign82] J. P. Ignizio. *Linear programming in single and multiple-objective systems*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1982.
 - [IK91] M. Inuiguchi and Y. Kume. Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. *European Journal of Operational Research*, 52(3):345–360, 1991.
 - [IL06] A. Ishizaka and M. Lusti. How to derive priorities in AHP: a comparative study. *Central European Journal of Operations Research*, 14(4):387–400, 2006.
 - [Jen84] R. E. Jensen. An alternative scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of mathematical psychology*, 28(3):317–332, 1984.
 - [JLYY08] X. Jiang, L. H. Lim, Y. Yao, and Y. Ye. Learning to rank with combinatorial hodge theory. *arXiv:0811.1067v1 [stat.ML]*, 1, 2008.
-

- [JM04] DF Jones and SJ Mardle. A distance-metric methodology for the derivation of weights from a pairwise comparison matrix. *Journal of the Operational Research Society*, 55(8):869–875, 2004.
 - [KO97] W. W. Koczkodaj and M. Orłowski. An orthogonal basis for computing a consistent approximation to a pairwise comparisons matrix. *Computers and Mathematics with Applications*, 34(10):41–47, 1997.
 - [KO99] W. W. Koczkodaj and M. Orłowski. Computing a consistent approximation to a generalized pairwise comparisons matrix. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(3):79–85, 1999.
 - [Koc93] W. W. Koczkodaj. A new definition of consistency of pairwise comparisons. *Mathematical and Computer Modelling*, 18(7):79–84, 1993.
 - [Kre91] M. Kress. Approximate articulation of preference and priority derivation - a comment. *European Journal of Operational Research*, 52(3):382–383, 1991.
 - [Kro87] J. Krovak. Ranking alternatives—comparison of different methods based on binary comparison matrices. *European Journal of Operational Research*, 32(1):86–95, 1987.
 - [KS40] M. G. Kendall and B. Smith. On the method of paired comparisons. *Biometrika*, 31:324–345, 1940.
 - [KvU03] M. Kwiesielewicz and E. van Uden. Ranking decision variants by subjective paired comparisons in cases with incomplete data. *Lecture notes in computer science*, pages 208–215, 2003.
 - [Kwi96] M. Kwiesielewicz. The logarithmic least squares and the generalized pseudoinverse in estimating ratios. *European Journal of Operational Research*, 93(3):611–619, 1996.
 - [Lin06] C. C. Lin. An enhanced goal programming method for generating priority vectors. *Journal of the Operational Research Society*, 57(12):1491–1496, 2006.
 - [Lin07] C. C. Lin. A revised framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices. *European Journal of Operational Research*, 176(2):1145–1150, 2007.
-

Referencias

- [Loo88] F. A. Lootsma. *Numerical scaling of human judgement in pairwise-comparison methods for fuzzy multi-criteria decision analysis*. Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, USA, 1988.
- [Mik04] L. Mikhailov. Group prioritization in the AHP by fuzzy preference programming method. *Computers and Operations Research*, 31(2):293–301, 2004.
- [MJAJRPTL05] J. M. Moreno-Jiménez, J. Aguarón-Joven, A. Raluy-Pirla, and A. Turón-Lanuza. A spreadsheet module for consistent consensus building in AHP-group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 14(2):89–108, 2005.
- [Mon96] H. Monsuur. An intrinsic consistency threshold for reciprocal matrices. *European Journal of Operational Research*, 96(2):387–391, 1996.
- [MS99] L. Mikhailov and M. G. Singh. Comparison analysis of methods for deriving priorities in the analytic hierarchy process. In *Systems, Man, and Cybernetics, 1999. IEEE SMC'99 Conference Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 1037–1042 vol. 1. IEEE, 1999.
- [PL03] J. I. Pelaez and M. T. Lamata. A new measure of consistency for positive reciprocal matrices. *Computers and Mathematics with Applications*, 46(12):1839–1845, 2003.
- [RG94] R. Ramanathan and L. S. Ganesh. Group preference aggregation methods employed in AHP: an evaluation and an intrinsic process for deriving members' weightages. *European Journal of Operational Research*, 79(2):249–265, 1994.
- [Rom91] C. Romero. *Handbook of critical issues in goal programming*. Pergamon Press New York, 1991.
- [RPRTGRG10] Y. Rojas-Ponce, M. Ruiz-Tagle, F. García-Robredo, and J. Solana Gutiérrez. Multiple-use forest planning model for second-growth forests of roble-raulí-coihue (genus nothofagus). *European Journal of Forest Research*, 129:947–960, 2010.
- [RT08] F. Roberts and A. Tsoukiàs. Computer science and decision theory: preface. *Annals of Operations Research*, 163(1):1–4, 2008.

Referencias

- [Saa77] T. L. Saaty. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of mathematical psychology*, 15:234–281, 1977.
- [Saa80] T. L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. Mc-Graw-Hill, New York, 1980.
- [SB02] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*. Springer, 2002.
- [SH92] A. Salo and R. P. Hämäläinen. Processing interval judgments in the analytic hierarchy process. *Multiple Criteria Decision Making, New York: Springer*, pages 359–372, 1992.
- [SH95] A. A. Salo and R. P. Hämäläinen. Preference programming through approximate ratio comparisons. *European Journal of Operational Research*, 82(3):458–475, 1995.
- [SH98] T. L. Saaty and G. Hu. Ranking by eigenvector versus other methods in the analytic hierarchy process. *Applied Mathematics Letters*, 11(4):121–125, 1998.
- [SIT04] K. Sugihara, H. Ishii, and H. Tanaka. Interval priorities in ahp by interval regression analysis. *European Journal of Operational Research*, 158(3):745–754, 2004.
- [SM07] W. E. Stein and P. J. Mizzi. The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 177(1):488–497, 2007.
- [SOD98] S. Shiraishi, T. Obata, and M. Daigo. Properties of a positive reciprocal matrix and their application to ahp. *Journal of the Operations Research Society of Japan-Keiei Kagaku*, 41(3):404–414, 1998.
- [SV87] T. L. Saaty and L. G. Vargas. Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 32(1):107–117, 1987.
- [TA98] E. Turban and J. E. Aronson. *Decision Support Systems and Intelligent Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [Thu27a] L. L. Thurstone. A law of comparative judgement. *Psychological Review*, 34:273–286, 1927.

Referencias

- [Thu27b] L. L. Thurstone. The method of paired comparisons for social values. *Journal of Abnormal and Social Psychology*, 21(384-400), 1927.
- [Tri00] E. Triantaphyllou. *Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [Ueb97] C. W. Ueberhuber. *Numerical computation: methods, software, and analysis*. Springer, 1997.
- [Wat80] G. A. Watson. *Approximation theory and numerical methods*. John Wiley and Sons, Toronto, 1980.
- [WE07] Y. M. Wang and T. M. S. Elhag. A goal programming method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix. *European Journal of Operational Research*, 177(1):458–471, 2/16 2007.
- [WPFV07] H. William, H. Press, B. P. Flannery, and W. T. Vetterling. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, NY, USA, 2007.
- [WYX05] Y. M. Wang, J. B. Yang, and D. L. Xu. A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices. *Fuzzy Sets and Systems*, 152(3):475–498, 2005.
- [Xu04] Z. S. Xu. Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 36(3):261–270, 2004.
- [YG73] D. M. Young and R. T. Gregory. *A survey of numerical mathematics*, volume 2. Addison-Wesley, 1973.
- [Yu73] PL Yu. A class of solutions for group decision problems. *Management Science*, 19(8):936–946, 1973.
- [Yu02] C. S. Yu. A GP-AHP method for solving group decision-making fuzzy AHP problems. *Computers and Operations Research*, 29(14):1969–2001, 2002.
- [YW99] M. Yoon and K. S. Whang. Pooling partial pairwise comparison in the ahp. *International Journal of Management Science*, 4(1):35–59, 1999.

ANEXOS

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

A.1. *todo4x4.m*

```
AV=[];
% arreglo con equivalencia
saaty=[1/9 1/7 1/5 1/3 1 3 5 7 9]
i=1;
for i12=1:9;
for i13=1:9;
for i14=1:9;
for i23=1:9;
for i24=1:9;
for i34=1:9;
mm=[1 saaty(i12) saaty(i13) saaty(i14); 1/saaty(i12) 1 saaty(i23) saaty(i24); 1/saaty(i13) 1/saaty
(i23) 1 saaty(i34); 1/saaty(i14) 1/saaty(i24) 1/saaty(i34) 1];
avmm=max(eigs(mm));
[V,D]=eig(mm);
res=eig(mm);
[valor,posicion]=max(res);
w=V(:,posicion);
suma=sum(w);
w=(1/suma).*w;
w=w';
filaOut=[i avmm w];
if i==1;
AV=[filaOut];
else
AV=[AV; filaOut];
end;
i=i+1;
end;
end;
end;
end;
end;
end;
```

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

A.2. *autovaloresn4.prg*

```
public saaty(9)
saaty(1)=1/9
saaty(2)=1/7
saaty(3)=1/5
saaty(4)=1/3
saaty(5)=1
saaty(6)=3
saaty(7)=5
saaty(8)=7
saaty(9)=9
sele 1
use autovalores_n4 alias av
zap
appe from autovalores_n4.txt sdf
sele 2
use aleatorios20bits alias al
n=4
RI=0.89
sele av
repla all nummat_ori with val(tmp1), av with val(tmp2)
for i=1 to n
    si=ltrim(str(i))
    repla all w&si with val(tw&si)
next
sele al
go top
sele av
go top
for i12=1 to 9
for i13=1 to 9
for i14=1 to 9
for i23=1 to 9
for i24=1 to 9
for i34=1 to 9
    sele av
        repla ci with (av-n)/(n-1), cr with ( (av-n)/(n-1) )/RI, num_alea with al.num_alea, m12
with saaty(i12),;
        m13 with saaty(i13), m14 with saaty(i14), m23 with saaty(i23), m24 with saaty(i24),
m34 with saaty(i34)
        sele al
        skip
        sele av
        skip
    next
next
next
next
```

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

```
next
next
next
sele av
sort on num_alea to xx
zap
appe from xx
repla all nummat with recno()
```

A.3. *genmatn6triang.prg*

```
sele 1
use matriz6x6 alias m6
public base(15), triang(15)
public m, nummat, n, prefijo
prefijo="mat_n6_"
n=6
base(1)=1
base(2)=1
base(3)=3
base(4)=5
base(5)=9
base(6)=1
base(7)=3
base(8)=5
base(9)=9
base(10)=3
base(11)=5
base(12)=9
base(13)=3
base(14)=7
base(15)=3
nt=15
m=1
nummat=1
for i=1 to nt
    triang(i)=base(i)
next
**** matriz base
genmat()
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+1, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
```

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

```
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+2, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+3, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+4, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+5, base(ii))
    next
    genmat()
next
**** matrices alteradas en 1 paso simple (-)
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk .and. base(ii)>1, base(ii)-1, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk .and. base(ii)>2, base(ii)-2, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk .and. base(ii)>3, base(ii)-3, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk .and. base(ii)>4, base(ii)-4, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
```

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

```

    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk .and. base(ii)>5, base(ii)-5, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 14
    for kk2=kk to 15
        for ii=1 to 15
            triang(ii)=iif(ii=kk .or. ii=kk2, base(ii)+1, base(ii))
        next
        genmat()
    next
next
for kk=1 to 14
    for kk2=kk to 15
        for ii=1 to 15
            triang(ii)=iif((ii=kk .or. ii=kk2) .and. base(ii)>1, base(ii)-1, base(ii))
        next
        genmat()
    next
next
for kk=1 to 14
    for kk2=kk to 15
        for ii=1 to 15
            triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+1, iif(ii=kk2 .and. base(ii)>1, base(ii)-1, base(ii)))
        next
        genmat()
    next
next
for kk=1 to 14
    for kk2=kk to 15
        for ii=1 to 15
            triang(ii)=iif(ii=kk2, base(ii)+1, iif(ii=kk .and. base(ii)>1, base(ii)-1, base(ii)))
        next
        genmat()
    next
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk, 1/2, base(ii))
    next
    genmat()
next
for kk=1 to 15
    for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk, 1/3, base(ii))
    next
    genmat()
next
```


A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

```
for kk=1 to 15
  for ii=1 to 15
    triang(ii)=iif(ii=kk, 1/4, base(ii))
  next
  genmat()
next
for kk=1 to 15
  for ii=1 to 15
    triang(ii)=iif(ii=kk, 1/5, base(ii))
  next
  genmat()
next
for kk=1 to 15
  for ii=1 to 15
    triang(ii)=iif(ii=kk, 1/6, base(ii))
  next
  genmat()
next
for kk=1 to 15
  for ii=1 to 15
    triang(ii)=iif(ii=kk, 1/7, base(ii))
  next
  genmat()
next
for kk=1 to 15
  for ii=1 to 15
    triang(ii)=iif(ii=kk, 1/8, base(ii))
  next
  genmat()
next
for kk=1 to 15
  for ii=1 to 15
    triang(ii)=iif(ii=kk, 1/9, base(ii))
  next
  genmat()
next
for saa=1 to 9 step 2
  for kk=1 to 14
    for kk2=kk to 15
      for ii=1 to 15
        triang(ii)=iif(ii=kk .or. ii=kk2, 1/saa, base(ii))
      next
      genmat()
    next
  next
next
next
for salto=1 to 4
  for saa=1 to 9 step 2
    for kk=1 to 14
```

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

```

    for kk2=kk to 15
        for ii=1 to 15
            triang(ii)=iif(ii=kk, 1/saa, iif(ii=kk2, base(ii)+salto, base(ii)))
        next
        genmat()
    next
next
next
next
for p=1 to 5
for kk=1 to 14
    for jj=kk+1 to 15
        for ii=1 to 15
            triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+p, base(ii))
            triang(ii)=iif(ii=jj, base(ii)+p, base(ii))
        next
        genmat()
    next
next
next
next
for p=1 to 5
for kk=1 to 14
    for jj=kk+1 to 15
        for ii=1 to 15
            triang(ii)=iif(ii=kk, base(ii)+p, base(ii))
            triang(ii)=iif(ii=jj, base(ii)+6-p, base(ii))
        next
        genmat()
    next
next
next
next
return

procedure genMat()
    sele m6
    zap
    for i=1 to n
        appe blank
        si=ltrim(str(i))
        repla c&si with 1
    next
    k=1
    for i=1 to n-1
        for j=i+1 to n
            ij=triang(k)
            ji=1/ij
            si=ltrim(str(i))
            sj=ltrim(str(j))
            sele m6

```

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

```
        go i
        repla c&sj with ij
        go j
        repla c&si with ji
        k=k+1
    next
next
snu=ltrim(str(nummat))
snummat=right( '00000'+snu ,6)
sele m6
archi='matricesTXT\' +prefijo+snummat
copy to &archi deli with blank
nummat=nummat+1
return
```

A.4. *av_n6.m*

```
for i=1:numMatrices;
    snum=strcat('000000',num2str(i));
    l=length(snum);
    snum2=substring(snum,l-6,l-1);
    m=strcat('m',snum2);
    m_in=strcat('matricesTXT\mat_n',num2str(n));
    m_in=strcat(m_in,'_');
    m_in=strcat(m_in,snum2);
    m_in=strcat(m_in,'.txt');
    mm=load(m_in);
    avmm=max(eigs(mm));
    [V,D]=eig(mm);
    res=eig(mm);
    [valor,posicion]=max(res);
    w=V(:,posicion);
    %Normalizar w
    suma=sum(w);
    w=(1/suma).*w;
    w=w';
    filaOut=[i avmm w];
    if i==1;
        AV=[filaOut];
    else
        AV=[AV; filaOut];
    end;
end;
save autovalores_n6.txt AV -ascii;
```

A. CÓDIGOS DE ALGORITMOS PARA GENERACIÓN ALEATORIA DE MATRICES

A.5. *autovalores_n6.prg*

```
sele 1
use autovalores_n6 alias av
zap
appe from autovalores_n6.txt sdf
sele 2
use aleatorios20bits alias al
n=6
RI=1.25
sele av
repla all nummat_ori with val(tmp1), av with val(tmp2)
for i=1 to 6
    si=ltrim(str(i))
    repla all w&si with val(tw&si)
next
sele al
go top
sele av
go top
do while .not. eof()
    repla ci with (av-n)/(n-1), cr with ( (av-n)/(n-1) )/RI, num_alea with al.num_alea
    sele al
    skip
    sele av
    skip
enddo
rangoCR=0.02
repla all rango_cr with (int(cr/rangoCR))*rangoCR+ (rangoCR/2)
sele av
sort on num_alea to xx
zap
appe from xx
repla all nummat with recno()
```